


UC-NRLF
B 2 868 474



EIN EINFACHER FALL DER TRANSVERSALEN SCHWINGUNG EINER RECHTECKIGEN ELASTISCHEN PLATTE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITÄT ZU GÖTTINGEN

VORGELEGT VON

F: C. ZEISSIG

IN DARMSTADT.

MIT ZWEI TAFELN.



LEIPZIG,

JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1897.

Referent: Herr Prof. Dr. W. Voigt.
Tag der mündlichen Prüfung: 28. Mai 1896.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhalt.

Einleitung. Aufgabestellung.

Wird eine begrenzte, ebene Platte in transversale Schwingungen versetzt, so wird sie entweder als Ganzes schwingen, oder sie wird sich in schwingende Theile zerlegen, die durch ruhende Linien, Knotenlinien, voneinander getrennt sind. Bekanntlich kann man durch Aufstreuen von Sand auf die Platte diese Knotenlinien sichtbar machen. Chladni[1]) hat zuerst dieses Experiment ausgeführt (1787) und gezeigt, welche grosse Mannichfaltigkeit in Knotenfiguren besteht. Die von ihm angestellten sehr zahlreichen Beobachtungen sind später von Strehlke[2]), Wheatstone[3]), Savart[4]) u. a. wiederholt und ergänzt worden. Alle diese experimentellen Untersuchungen gipfeln in Versuchen, einfache empirische Gesetze herzuleiten, die die Schwingungsart einer Platte, ihre Dimensionen und die Höhe des von ihr erzeugten Tones in Zusammenhang miteinander bringen.

Mit der Theorie des von Chladni angeregten Problems der transversalen Schwingungen von elastischen Scheiben hat sich zuerst Sophie Germain[5]) beschäftigt. Sie hat mehrere Abhandlungen über diesen Gegenstand geschrieben, die erste stammt aus dem Jahre 1810. Fräulein Germain leitet auf Grund einer Hypothese, die sie über die elastischen Kräfte einer Scheibe aufstellt, mit Unterstützung von Lagrange die partielle Differentialgleichung für das Innere einer Platte ab, giebt die Grenzbedingungen dazu an und integrirt die Gleichung für den besonderen Fall rechteckiger Platten.

---

1) Chladni, Entdeckungen über die Theorie des Klanges. 1787.
2) Strehlke, Pogg. Ann. 4. 1825 und 18. 1830.
3) Wheatstone, Phil. Trans. 2. 1833.
4) Savart, Ann. de chim. et de phys., série (2) 73. 1840.
5) Sophie Germain, Mémoires de l'Institut. 1810.

Poisson[1]) hat 1829 das Problem der schwingenden Platte in strengerer Weise wie Sophie Germain behandelt. Er geht von den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen elastischer Körper aus und wendet sie auf den besonderen Fall der Platte an. Dabei gelangt er zur selben Differentialgleichung wie Sophie Germain, seine Randbedingungen sind aber andere. Geprüft hat Poisson seine Gleichungen, indem er sie auf eine kreisförmige Scheibe anwandte und dabei annahm, dass alle gleichweit vom Mittelpunkte der Scheibe entfernten Theile sich stets im gleichen Schwingungszustande befinden. Für diesen besonderen Fall fand er seine Theorie bestätigt.

Nach Poisson hat erst Kirchhoff[2]) wieder sich mit der Theorie querschwingender Platten beschäftigt, und seine Arbeit von 1850 ist als die eigentlich grundlegende zu betrachten. Kirchhoff schlägt einen ähnlichen Weg wie Poisson ein, indem er allgemein die Bewegungsgleichung für die Platte aus den allgemeinen Elasticitätsgleichungen ableitet. Er erhält so die Poisson'sche Hauptgleichung, aber andere Grenzbedingungen. Kirchhoff zeigt auch, dass die Theorie von Sophie Germain unrichtig sein müsse, wenn sie auch für rechteckige Platten scheinbar Uebereinstimmung mit dem Experiment ergeben habe; ebenso beweist er, dass Poisson einen Fehler begangen habe, da von dessen drei Randbedingungen eine im allgemeinen nicht zu erfüllen sei. Die anderen beiden Poisson'schen Randbedingungen stimmen überein mit den von Kirchhoff für die Grenze aufgestellten Gleichungen.

Die Richtigkeit der Kirchhoff'schen Gleichungen ist bisher von Niemandem angezweifelt worden. Sie haben eine erste Bestätigung durch Kirchhoff selbst gefunden, der sie auf den Sonderfall einer *Kreisscheibe* mit freiem Rande anwandte[3]) und Resultate erhielt, die mit den Messungen Strehlke's beste Uebereinstimmung zeigten. Eine Integration der Hauptglei-

---

1) Poisson, Mémoires de l'Academie des Sciences **8.** 1829.

2) G. Kirchhoff, Crelle's Journ. **40.** 1850 und ges. Abhandl. S. 237.

3) Schon Poisson hatte, wie oben gesagt, den Fall einer Kreisscheibe behandelt, aber nur *Kreise* als Knotenlinien zugelassen. Er erhielt Uebereinstimmung mit der Beobachtung, denn für diesen besonderen Fall ist seine genannte dritte Grenzgleichung identisch erfüllt. Vergl. Kirchhoff a. a. O.

chung für anders gestaltete Platten, deren Grenzen frei sind, begegnet sehr grossen Schwierigkeiten und ist bis jetzt noch nicht gelungen.

In neuerer Zeit ist von Herrn Shohé Tanaka[1]) ein Versuch gemacht worden, durch ein Näherungsverfahren die Gleichung für *quadratische Platten* zu integriren. Er benutzt den Umstand, dass es bei quadratischen Platten einfache Schwingungen giebt, bei welchen nur Knotenlinien parallel den Kanten auftreten, bei denen also die Platte in rechteckigen Theilen schwingt, deren Ränder in einer gewissen Weise fest liegen, und dass sich für solche Plattentheile Lösungen der Kirchhoff'schen Formeln aufstellen lassen. Aus solchen Lösungen bildet Herr Tanaka dann angenäherte particuläre Lösungen für die gesammte Platte. Bei quadratischen Platten giebt es nun im allgemeinen zwei der obigen einfachen Schwingungen mit der gleichen Periode, die also bei einem einfachen Tone gleichzeitig bestehen können. Somit kann Herr Tanaka zwei seiner particulären Lösungen zu einer allgemeinen zusammenfassen, und die durch dergleichen bestimmten Knotenlinien stimmen in der That, besonders für complicirtere Fälle, befriedigend mit den Beobachtungen überein.

Eine Integration der Differentialgleichung für rechteckige Platten mit *freien* Rändern ist, wie schon gesagt, bis jetzt noch nicht gelungen. Für rechteckige Platten mit *festen* Rändern ist die Integration wohl möglich, für diesen Fall lassen sich aber Beobachtungen nicht anstellen. Es hat nun Herr Prof. W. Voigt[2]) die Bemerkung gemacht, dass, wenn zwei Gegenkanten einer rechteckigen Platte *frei*, die zwei anderen aber in bestimmter Weise *festgehalten* sind, die Integration möglich ist und gleichzeitig sich dieser Fall praktisch verwirklichen lässt. Dies erreicht man, *wenn man zwei Gegenkanten einer rechteckigen Platte keilförmig zuschärft und die Platte mit diesen Kanten zwischen zwei feste Wände klemmt, sodass die Punkte dieser Kanten an transversalen Verschiebungen verhindert sind, aber Drehungen der Platte um diese Kanten stattfinden können; lässt man zugleich die beiden anderen Gegen-*

---

1) Shohé Tanaka, Wied. Ann. 32. 1887.

2) W. Voigt, Bemerkungen zu dem Problem der transversalen Schwingungen rechteckiger Platten, Gött. Nachr. No. 6. 1893.



kanten frei, so hat man eine Befestigungsart, bei der die Erregung dauernder Schwingungen ausführbar ist und die ausserdem eine strenge theoretische Behandlung zulässt. Die Durchführung dieses besonderen Problems der transversalen Schwingung einer rechteckigen Platte ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Die von Herrn Voigt bereits durchgeführte Integration der Hauptgleichung ist im folgenden ersten Paragraphen zunächst wiedergegeben.

Erster Theil.

Theoretische Behandlung des Problems.

§ 1. Aufstellung der Gleichungen. Integration.

Es werde ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt, dessen XY-Ebene in der Mittelfläche der rechteckigen Platte liege. Die Axen X und Y des Coordinatensystems seien parallel den beiden freien bez. den beiden geklemmten Kanten der Platte, und der Coordinatenanfang sei in die Mitte der einen geklemmten Kante gelegt (vgl. Fig. 1).

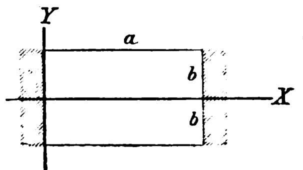


Fig. 1.

Bezeichnet man mit w die transversale Verrückung, so ist die Hauptgleichung für das Innere der Platte[1]) unter Annahme stationären Zustandes

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D^2 \frac{c^2 - c_1^2}{12\, c\, \varepsilon} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0.$$

Hierin bedeutet D die Dicke der Platte, ε die Dichte ihrer Substanz, c und c_1 die Elasticitätsconstanten derselben. Setzt man abgekürzt

$$k^2 = D^2 \cdot \frac{c^2 - c_1^2}{12\, c\, \varepsilon}, \tag{1}$$

so schreibt sich die Hauptgleichung einfacher

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k^2 \Delta\Delta w = 0. \tag{2}$$

---

1) Vgl. Kirchhoff, Crelle's Journal **40.** S. 40 1850 oder W. Voigt, Compend. der theor. Phys. **1.** S. 451.

Diese partielle Differentialgleichung gilt allgemein für ebene Platten, jedoch ist sie unter der Annahme abgeleitet worden, dass die Dicke der Platte unendlich klein gegenüber ihren Querdimensionen sei.

Die Länge der Platte in der Richtung der X-Axe sei a, in der Richtung der Y-Axe $2b$. Dann sind die festen Kanten der Platte gegeben durch $x = 0$ und $x = a$, und dort gilt

$$\left\{\begin{aligned} w &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

welche letztere Gleichung aussagt, dass keine Drehungsmomente um die Kanten $x = 0$ und $x = a$ bestehen können, da eben die Platte um diese Kanten drehbar befestigt ist.

Für die freien Kanten $y = +b$ und $y = -b$ gilt

$$\left\{\begin{aligned} (c + c_1)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ (c + c_1)\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2c + c_1)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Durch den Ansatz

$$w = v \sin \frac{2\pi t}{T} \sin p x$$

wird sogleich den beiden Randbedingungen (3) genügt. Dabei ist unter v eine Function von y allein verstanden; T bedeutet die Dauer einer Schwingung der Platte und p ist definirt durch

$$p = \frac{h\pi}{a}, \tag{5}$$

wobei h eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... ist.

Wird der Ansatz für w in die Hauptgleichung (2) eingesetzt, so folgt für die Function v die Gleichung

$$-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 v + k^2\left(\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}p^2 + vp^4\right) = 0$$

welche sich, wenn man einführt

$$r^2 = \frac{2\pi}{Tkp^2} \tag{6}$$

auch schreibt

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - 2p^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v(p^4 - p^4 r^4) = 0.$$

Diese Differentialgleichung wird integrirt durch

$$v = e^{qy},$$

wobei $$(q^2 - p^2)^2 = p^4 r^4$$

oder

(7) $$q = \pm p \sqrt{1 \pm r^2}.$$

q hat also 4 Wurzelwerthe. Diese 4 Wurzeln sind solange reell, als r^2 kleiner als 1 ist. Ist r^2 grösser als die Einheit, so werden zwei der Wurzeln rein imaginär. Dieser Unterscheidung entsprechend sind zwei Gestalten particulärer Lösungen v zu betrachten, welche sich nach Einführung hyperbolischer Functionen folgendermaassen schreiben:

1. Fall. $0 < r^2 < 1$

(8) $$\begin{cases} v' = A' \operatorname{Cos}(yp\sqrt{1+r^2}) + B' \operatorname{Cos}(yp\sqrt{1-r^2}) \\ \quad + C' \operatorname{Sin}(yp\sqrt{1+r^2}) + D' \operatorname{Sin}(yp\sqrt{1-r^2}) \end{cases}$$

2. Fall. $1 < r^2 < \infty$

(9) $$\begin{cases} v = A \operatorname{Cos}(yp\sqrt{r^2+1}) + B \cos(yp\sqrt{r^2-1}) \\ \quad + C \operatorname{Sin}(yp\sqrt{r^2+1}) + D \sin(yp\sqrt{r^2-1}) \end{cases}$$

$A' B' C' D'$ und $A B C D$ sind Constante. Zu ihrer Bestimmung dienen die Grenzbedingungen (4), welche bis jetzt noch nicht erfüllt sind. Da die Ausdrücke für v' und v Glieder, welche in Bezug auf y gerade, und Glieder, welche ungerade sind, enthalten, werden sich die Grenzgleichungen (4) nach Einführung der Ausdrücke v' und v in je zwei Theile spalten, die sich beim Zeichenwechsel von y verschieden verhalten; der eine Theil wird ungeändert bleiben, der andere das Vorzeichen mit y wechseln. Nach den Grenzbedingungen soll die Summe der beiden Theile sowohl für $y = +b$, als für $y = -b$ verschwinden. Das kann aber nur geschehen, wenn jeder Theil für sich zu Null wird; also müssen die Grenzbedingungen (4) getrennt durch die *geraden* Glieder in den Ausdrücken v' und v

(10) $$\begin{cases} v_1' = A' \operatorname{Cos}(yp\sqrt{1+r^2}) + B' \operatorname{Cos}(yp\sqrt{1-r^2}) \\ v_1 = A \operatorname{Cos}(yp\sqrt{r^2+1}) + B \cos(yp\sqrt{r^2-1}) \end{cases}$$

und durch die *ungeraden* Glieder

$$(11) \qquad \begin{cases} v_2' = C' \mathfrak{Sin}(yp\sqrt{1+r^2}) + D' \mathfrak{Sin}(yp\sqrt{1-r^2}) \\ v_2 = C \mathfrak{Sin}(yp\sqrt{r^2+1}) + D \sin(yp\sqrt{r^2-1}) \end{cases}$$

erfüllt werden. Diese Zerlegung von v' und v in

$$v' = v_1' + v_2'$$
$$v = v_1 + v_2$$

führt also zu vier verschiedenen Gleichungspaaren, je nachdem v_1', v_2', v_1 oder v_2 in die Grenzgleichungen (4) eingesetzt wird.

Das Einsetzen der Lösung v_1' ergiebt:

$$(12) \qquad \begin{cases} A'((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1+r^2}) \\ \qquad - B'((c+c_1)r^2-c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1-r^2}) = 0 \\ A'((c+c_1)r^2-c)\sqrt{1+r^2}\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1+r^2}) \\ \qquad - B'((c+c_1)r^2+c)\sqrt{1-r^2}\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1-r^2}) = 0 \end{cases}$$

Das Einsetzen der Lösung v_2' ergiebt:

$$(13) \qquad \begin{cases} C'((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1+r^2}) \\ \qquad - D'((c+c_1)r^2-c)\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{1-r^2}) = 0 \\ C'((c+c_1)r^2-c)\sqrt{1+r^2}\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1+r^2}) \\ \qquad - D'((c+c_1)r^2+c)\sqrt{1-r^2}\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1-r^2}) = 0 \end{cases}$$

Das Einsetzen der Lösung v_1 ergiebt:

$$(14) \qquad \begin{cases} A((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{r^2+1}) \\ \qquad - B((c+c_1)r^2-c)\cos(pb\sqrt{r^2-1}) = 0 \\ A((c+c_1)r^2-c)\sqrt{r^2+1}\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{r^2+1}) \\ \qquad + B((c+c_1)r^2+c)\sqrt{r^2-1}\sin(pb\sqrt{r^2-1}) = 0 \end{cases}$$

Das Einsetzen der Lösung v_2 ergiebt:

$$(15) \qquad \begin{cases} C((c+c_1)r^2+c)\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{r^2+1}) \\ \qquad - D((c+c_1)r^2-c)\sin(pb\sqrt{r^2-1}) = 0 \\ C((c+c_1)r^2-c)\sqrt{r^2+1}\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{r^2+1}) \\ \qquad - D((c+c_1)r^2-c)\sqrt{r^2-1}\cos(pb\sqrt{r^2-1}) = 0 \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man zunächst die Constantenverhältnisse $A':B'$, $C':D'$, $A:B$ und $C:D$. Dass sich die Constanten A', B' ... A, B ... selbst nicht bestimmen lassen, sondern nur deren Verhältnisse, ist verständlich, da ja keinerlei Annahme über die Stärke der Erregung der Platte gemacht ist.

Ausserdem ergiebt jedes der 4 Gleichungspaare, durch Elimination des bez. Constantenverhältnisses, eine Bestimmungsgleichung für r^2, sodass folgende 4 Bestimmungsgleichungen entstehen:

$$(16)\qquad \left(\frac{(1 + c_1/c)\,r^2 + 1}{(1 + c_1/c)\,r^2 - 1}\right)^2 \sqrt{\frac{1 - r}{1 + r^2}} = + \frac{\mathfrak{Tg}\,(p\,b\sqrt{1 + r^2})}{\mathfrak{Tg}\,(p b\sqrt{1 - r^2})}$$

$$(17)\qquad \left(\frac{(1 + c_1/c)\,r^2 + 1}{(1 + c_1/c)\,r^2 - 1}\right)^2 \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2}} = + \frac{\mathfrak{Ctg}\,(p b\sqrt{1 + r^2})}{\mathfrak{Ctg}(p b\sqrt{1 - r^2})}$$

$$(18)\qquad \left(\frac{(1 + c_1/c)\,r^2 + 1}{(1 + c_1/c)\,r^2 - 1}\right)^2 \sqrt{\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}} = - \frac{\mathfrak{Tg}\,(p b\sqrt{r^2 + 1})}{\mathrm{tg}\,(p b\sqrt{r^2 - 1})}$$

$$(19)\qquad \left(\frac{(1 + c_1/c)\,r^2 + 1}{(1 + c_1/c)\,r^2 - 1}\right)^2 \sqrt{\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}} = + \frac{\mathfrak{Ctg}\,(p b\sqrt{r^2 + 1})}{\mathrm{ctg}\,(p b\sqrt{r^2 - 1})}$$

Von diesen 4 Gleichungen gelten die ersten beiden für den Fall $0 < r^2 < 1$, die letzten beiden für den Fall $1 < r^2 < \infty$. Die gegebenem p (bez. h) entsprechenden Wurzeln r^2 dieser Gleichungen sind nun zu berechnen.

§ 2. Die Wurzeln der transcendenten Gleichungen 16, 17, 18, 19.

Die Auflösung der in Bezug auf r^2 transcendenten Gleichungen (16), (17), (18), (19) kann durch Entwickelung der hyperbolischen bez. trigonometrischen Functionen erfolgen, oder auch durch die graphische Methode. Hier ist der letztere Weg eingeschlagen, der den Vorzug der guten Uebersichtlichkeit besitzt, vielleicht auch am schnellsten zum Ziele führt. Bei graphischer Auflösung einer Gleichung

$$f(r^2) = f'\,(r^2)$$

wird diese zerlegt in 2 Gleichungen

$$f(r^2) = a$$
$$f'\,(r^2) = b,$$

für welche zusammen gehörige Werthepaare (r^2, a) bez. (r^2, b) berechnet und eingetragen werden in dasselbe Coordinatensystem, wobei die Axe der a zugleich auch zur Axe der b genommen wird. So entsteht eine der linken Seite der Ausgangsgleichung und eine der rechten Seite derselben zugehörige Curve. Schneiden sich diese beiden Curven, so ist für die Schnittpunkte jedenfalls $a = b$, also die Ausgangsgleichung erfüllt, und die Coordinaten r^2 der Schnittpunkte sind Wurzeln der Gleichung.

Im Folgenden seien zunächst die Kurven der ***linken Seiten*** der Gleichungen (16) bis (19) behandelt. Es liegen nur zwei von einander verschiedene Fälle vor, da in (16) und (17) links derselbe Ausdruck steht, und ebenso in (18) und (19) der gleiche.

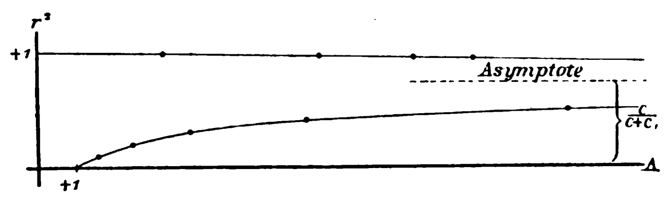


Fig. 2.

Für die Gleichungen (16) und (17) stellt sich die linke Seite durch eine Curve (Fig. 2) dar, die für den Bereich $0 < r^2 < 1$, für den allein die Gleichung gilt, in dem ersten Quadranen verläuft, und die in zwei Aeste getheilt ist. Die Curve beginnt für $r^2 = 0$ in dem Punkte $+1$, biegt bei wachsendem r^2 in den ersten Quadranten ein, sich von der Axe der r^2 mehr und mehr entfernend, und nähert sich asymptotisch der Geraden $r^2 = c/(c + c_1)$. Dies ist der erste Theil der Curve. Der zweite Theil hat dieselbe Gerade $r^2 = c/(c + c_1)$ zur Asymptote; es kehrt die Curve also bei weiter wachsendem r^2 aus dem positiv Unendlichen zurück. Sie endigt in dem Punkte $r^2 = 1$ der r^2-Axe, wo sie die Gerade $r^2 = 1$ berührt — da $d(r^2)/da = 0$ für $r^2 = 1$.

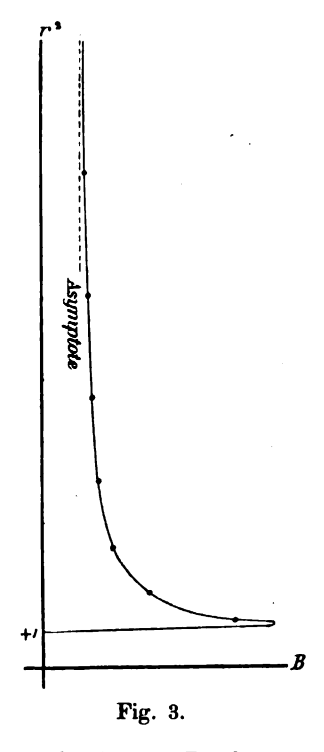


Fig. 3.

Die linke Seite der Gleichung (18) bez. (19) stellt sich durch eine Curve (Fig. 3) dar, welche für den Bereich $1 < r^2 < \infty$ ebenfalls völlig im ersten Quadranten verläuft. Die Curve beginnt im Punkte $+ 1$ der r^2-Axe, woselbst sie die Gerade $r^2 = 1$ berührt. Sie ver-

läuft zunächst nahezu parallel der B-Axe, erreicht ein Maximum, dessen Lage durch das Verhältniss c/c_1 gegeben ist, kehrt dann um und nähert sich asymptotisch einer Parallelen zur Axe der r^2 im Abstande $+1$.

Wir kommen zu den *rechten Seiten* der Gleichungen (16) bis (19). Sie sind sämmtlich von einander verschieden. Während die linken Seiten nur das Verhältniss der Elasticitätsconstanten c/c_1 enthielten, kommt hier das Aggregat pb vor, welches nach (5) eine Abkürzung für $h\pi . b/a$ ist. Da h bei den verschiedenen Einzellösungen ein verschiedenes ist ($h = 1$, 2, 3, 4 ...) und auch das Verhältniss a/b sich ändert, sobald ein anderes Plattenformat gewählt wird, sind hier nicht vier bestimmte Curven zu construiren, sondern vier Schaaren von Curven, jede Schaar bedingt durch die verschiedenen h und a/b. Es sei hier zunächst der Curventypus jeder einzelnen Schaar besprochen.

Einfach gestalten sich die Curven für die rechten Seiten der Gleichungen (16) und (17). Sie bestehen aus nur einem Stück, und dieses liegt im ersten Quadranten. Bei (16) ergiebt

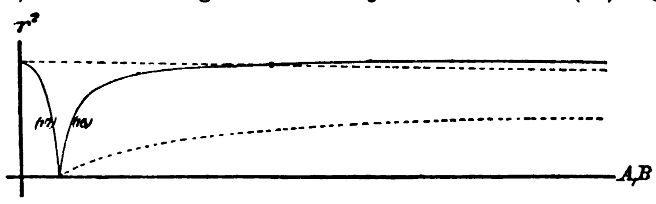


Fig. 4.

sich für die rechte Seite eine Curve (in Fig. 4 mit (16) bezeichnet), welche für $r^2 = 0$ im Punkte $+1$ beginnt, zunächst steil ansteigt, dann umbiegt und asymptotisch sich der Geraden $r^2 = 1$ nähert. Sie hat mit der Curve, welche die linke Seite derselben Gleichung darstellt (in Fig. 4 gestrichelt eingezeichnet), zwei Punkte gemeinsam. Von diesen ist aber der eine mit der Ordinate $r^2 = 0$ als Lösung auszuschliessen, da $r^2 = 0$ zu $v_1' = 0$ führt, was keine Lösung des Problems liefert. Es bleibt also ein Schnittpunkt übrig, welcher *die einzige Wurzel der Gleichung (16)* darstellt. Er liegt nothwendigerweise zwischen $r^2 = c/(c + c_1)$ und $r^2 = 1$. Für jedes h und jedes Verhältniss a/b ergiebt sich ein bestimmter Wurzelwerth r^2. Er ist kleiner als 1, aber sehr nahe der Einheit gleich, und zwar um so mehr, je grösser h und je kleiner a/b ist.

Die rechte Seite der Gleichung (17) ist reciprok derjenigen der Gleichung (16). Daraus ergiebt sich für diese Gleichung die Curve, die in Fig. 4 mit (17) bezeichnet ist. Sie beginnt für $r^2 = 0$ auch im Einheitspunkte, steigt steil an, wendet sich aber dann nicht für $r^2 = 1$ ins positiv Unendliche, sondern dem Werthe 0 zu. Sie hat wieder zwei Punkte und nur zwei Punkte — welches auch das h und das a/b sein mag — mit der Curve für die linke Seite der Gleichung gemeinsam. Beide Wurzeln, $r^2=0$ und $r^2=1$, sind aber zu verwerfen, da sie beide auf $v_2' = 0$ führen und also keine particuläre Lösung geben. *Die Gleichung (17) liefert demnach keine Wurzeln.*

Es sind zum Schluss noch die Gleichungen (18) und (19) zu erledigen. Deren rechte Seiten sind wieder, abgesehen vom Vorzeichen, einander reciprok. Sie enthalten beide periodische Functionen, also werden sie durch Curven, welche periodisch verlaufen, dargestellt werden. Die hyperbolische Tangente und Cotangente in diesen Gleichungen ist, je grösser r^2, um so mehr der Einheit gleich, und es ist darum die trigonometrische Tangente bez. Cotangente bei der Darstellung allein bestimmend.

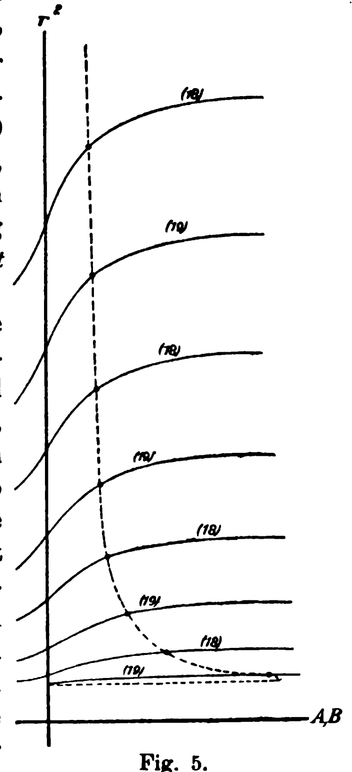


Fig. 5.

Man erhält hier Curven, wie sie sich bei der graphischen Construction einer trigonometrischen Tangente bei wachsendem Argumente ergeben. In Fig. 5 sind gleichzeitig die Curven für (18) und (19) eingezeichnet. Die Asymptoten für die einzelnen Zweige sind Gerade $r^2 = \text{const.}$, und zwar bei Gleichung (18) durch:

$$\frac{h}{a/b}\sqrt{r^2 - 1} = n,$$

bei Gleichung (19) durch:

$$\frac{h}{a/b}\sqrt{r^2-1} = \frac{2n+1}{2}$$

gegeben, wobei $n = 1, 2, 3 \ldots$. Die einzelnen Curvenzweige schneiden die Axe der r^2 in Punkten, welche bei (18) gegeben sind durch:

$$\frac{h}{a/b}\sqrt{r^2-1} = \frac{2n+1}{2}$$

und bei (19) durch:

$$\frac{h}{a/b}\sqrt{r^2-1} = n.$$

Diese Wechselbeziehung von Axenschnittpunkt und Asymptote bei (18) und (19) ist durch die erwähnte Reciprocität bedingt.

Zwischen je zwei aufeinander folgenden Asymptoten schneiden die Zweige einmal die Curve der linken Seiten der Gleichungen, liegt also je eine Wurzel. Deren giebt es demnach bei (18) wie (19) unendlich viele. Die erste Wurzel $r^2 = 1$ der Gleichung (19) ist, da sie auf $v_2 = 0$ führt, auszuschliessen. Je grösser r^2, mit um so grösserer Annäherung sind die Wurzeln für (18) bestimmt durch:

$$\frac{h}{a/b}\sqrt{r^2-1} = n + \frac{3}{4}$$

und für (19) durch:

$$\frac{h}{a/b}\sqrt{r^2-1} = n + \frac{1}{4},$$

denn für diese Werthe wird die rechte Seite der Gleichungen (18) bez. (19) nahe $= 1$, welchem Grenzwerthe für grosse r^2 auch die linken Seiten dieser Gleichungen zustreben. Man erkennt, dass die Wurzeln um so mehr auseinander rücken, je grösser a/b und je kleiner h ist.

Die im Folgenden wiedergegebenen Resultate der graphischen Berechnung sind auf Grund der Annahme über das Verhältniss der Elasticitätsconstanten:

$$c_1/c = {}^1/_3$$

erhalten. Dieses Verhältniss ist gleichbedeutend mit dem Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation, gewöhnlich mit μ bezeichnet, welches gemäss zahlreicher Beobachtungen (von Wertheim, Kirchhoff, W. Voigt u. a. m.) für Metalle

sehr nahe = $^1/_3$ gefunden worden ist.[1]) Da ursprünglich beabsichtigt war, *Metallplatten* zu den Beobachtungen anzuwenden, ist dieser Werth $c_1/c = {}^1/_3$ hier zu Grunde gelegt. Ich habe gefunden, dass nur eine sehr kleine Aenderung in den Wurzelwerthen eintritt, selbst wenn das Verhältniss c_1/c stark von dem Werthe $^1/_3$ abweicht, und habe darum die hier unter der Annahme $c_1/c = {}^1/_3$ gewonnenen Wurzelwerthe r^2 auch für meine Beobachtungen mit *Glasplatten* zu Grunde gelegt, bei welchen jedenfalls das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation nicht genau $^1/_3$ ist.[2])

Die Platte hat die Kantenlängen a und $2b$. Das Kantenverhältniss ist also durch a/b festgelegt. Es sind hier für die Kantenverhältnisse $a/b = 1, 2, 3, 4$ die Wurzeln r^2 berechnet, und jedes Mal sind für h die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 eingesetzt worden.

Es seien im Folgenden den Werthen r^2 noch die Werthe r^2h^2 hinzugefügt.

Wurzeln der Gleichung (16).

$a/b = 1.$

	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$
$r^2 =$	0,993	0,996	0,997	0,999	0,999
$r^2h^2 =$	0,993	3,99	8,97	15,98	24,97

$a/b = 2.$

	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$
$r^2 =$	0,986	0,993	0,995	0,997	0,998
$r^2h^2 =$	0,986	3,97	8,96	15,95	24,98

$a/b = 3.$

	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$
$r^2 =$	0,978	0,990	0,993	0,995	0,996
$r^2h^2 =$	0,978	3,96	8,94	15,92	24,90

$a/b = 4.$

	$h = 1$	$h = 2$	$h = 3$	$h = 4$	$h = 5$
$r^2 =$	0,970	0,988	0,992	0,993	0,994
$r^2h^2 =$	0,970	3,95	8,93	15,89	24,85

Wurzeln der Gleichung (17).

Gleichung (17) hat keine in Betracht kommenden Wurzeln.

---

1) Vgl. die Zusammenstellung in **Winkelmann's** Handb. I. S. 246.
2) Vgl. S. 41 u. f.

Wurzeln der Gleichung (18).

Es sind für jeden einzelnen Fall immer nur so viel Wurzeln berechnet worden, als zu der weiter unten zu besprechenden graphischen Darstellung erforderlich schien.

$a/b = 1.$

$h = 1$		$h = 2$		$h = 3$	
r^2	r^2h^2	r^2	r^2h^2	r^2	r^2h^2
1,82	1,82	1,22	4,88	1,10	9,90
4,32	4,32	1,90	7,60	1,41	12,69
8,78	8,78	3,03	12,12	1,93	17,37
15,21	15,21	4,64	18,56	2,65	23,85
23,68	23,68	6,75	27,00	3,60	32,40
34,15	34,15	9,36	37,44	4,76	42,84
46,63	46,63	12,48	49,92	6,14	55,26
61,13	61,13	16,09	64,36	7,74	69,66
77,61	77,61	20,21	80,84	9,57	86,13
96,11	96,11	24,83	99,32	11,62	104,58
		29,94			

$h = 4$		$h = 5$	
r^2	r^2h^2	r^2	r^2h^2
1,056	16,90	$1{,}035_5$	25,89
1,236	19,78	$1{,}151_0$	28,78
1,531	24,50		
1,947	31,15		
2,481	39,70		
3,136	50,18		

$a/b = 2$, quadratische Platte.

$h = 1$		$h = 2$		$h = 3$	
r^2	r^2h^2	r^2	r^2h^2	r^2	r^2h^2
3,76	3,76	1,82	7,28	1,38	12,42
13,56	13,56	4,32	17,28	2,55	22,95
31,46	31,46	8,78	35,12	4,40	39,60
57,40	57,40	15,21	60,84	7,39	66,51
91,35	91,35	23,68	94,72		

$h = 4$

r^2	$r^2 h^2$
1,22	19,52
1,90	30,40
3,03	48,48
4,64	74,24
6,75	108,00

$h = 5$

r^2	$r^2 h^2$
1,143	28,57
1,590	39,75

$a/b = 3.$

$h = 1$

r^2	$r^2 h^2$
6,72	6,72
28,92	28,92
69,25	69,25

$h = 2$

r^2	$r^2 h^2$
2,67	10,68
8,20	32,20
18,23	72,92
32,80	131,20

$h = 3$

r^2	$r^2 h^2$
1,82	16,38
4,32	38,88
8,78	79,02

$h = 4$

r^2	$r^2 h^2$
1,480	23,68
2,934	46,94
5,435	86,96

$h = 5$

r^2	$r^2 h^2$
1,316	32,90

$a/b = 4.$

$h = 1$

r^2	$r^2 h^2$
10,73	10,73
50,30	50,30

$h = 2$

r^2	$r^2 h^2$
3,76	15,04
13,56	54,24

$h = 3$

r^2	$r^2 h^2$
2,357	21,21

$h = 4$

r^2	$r^2 h^2$
1,82	29,12
4,32	69,12

$h = 5$

r^2	$r^2 h^2$
1,544	38,60

Wurzeln der Gleichung (19).

$a/b = 1$.

$h = 1$

r^2	$r^2 h^2$
1,12	1,12
2,84	2,84
6,29	6,29
11,75	11,75
19,21	19,21
28,69	28,69
40,18	40,18

$h = 2$

r^2	$r^2 h^2$
1,049	4,20
1,504	6,02
2,405	9,62
3,775	15,10
5,632	22,53
7,995	31,98
10,857	43,43

$h = 3$

r^2	$r^2 h^2$
1,020	9,18
1,231	11,08
1,657	14,91
2,267	20,40
3,101	27,91

$h = 4$

r^2	$r^2 h^2$
1,010	16,16
1,131	18,10
1,370	21,92
1,726	27,62

$h = 5$

r^2	$r^2 h^2$
1,006	25,15
1,084	27,10
1,239	30,98

$a/b = 2$, quadratische Platte.

$h = 1$

r^2	$r^2 h^2$
1,67	1,67
7,68	7,68
21,54	21,54
43,47	43,47
73,40	73,40

$h = 2$

r^2	$r^2 h^2$
1,197	4,79
2,837	11,35
6,291	25,16
11,745	46,98
19,21	76,84

$h = 3$

r^2	$r^2 h^2$
1,089	9,80
1,869	16,82
3,432	30,89
5,855	52,70

$h = 4$

r^2	$r^2 h^2$
1,049	16,78
1,504	24,06
2,405	38,48
3,775	60,40

$h = 5$

r^2	$r^2 h^2$
1,031	25,78
1,330	33,25

$a/b = 3.$

$h = 1$

r^2	$r^2 h^2$
2,25	2,25
15,55	15,55
46,83	46,83
96,26	96,26

$h = 2$

r^2	$r^2 h^2$
1,413	5,65
4,880	19,52
12,645	50,58

$h = 3$

r^2	$r^2 h^2$
1,197	10,77
2,837	25,53
6,291	56,62
11,75	105,70

$h = 4$

r^2	$r^2 h^2$
1,113	17,81
2,081	33,30

$h = 5$

r^2	$r^2 h^2$
1,072	26,80
1,713	42,82

$a/b = 4.$

$h = 1$

r^2	$r^2 h^2$
2,83	2,83
26,49	26,49

$h = 2$

r^2	$r^2 h^2$
1,67	6,68
7,68	30,72

$h = 3$

r^2	$r^2 h^2$
1,335	12,02
4,126	37,13

$h = 4$

r^2	$r^2 h^2$
1,197	19,15
2,837	45,39

$h = 5$

r^2	$r^2 h^2$
1,128	28,20

§ 3. Knotenlinien bei einfachen Schwingungen.

Die transversale Verrückung war durch den Ansatz gegeben:

$$w = v \sin \frac{2\pi t}{T} \sin \frac{h\pi x}{a}.$$

Alle diejenigen Punkte der Platte werden Knotenpunkte sein bez. Knotenlinien angehören, für welche zu jeder Zeit die Verrückung $w = 0$ ist. Zwei Factoren können w für jedes t zu Null machen, v und $\sin h\pi x/a$. v ist eine Function von y allein und der andere Factor enthält nur x. Daher ist sofort zu überschauen, dass die Knotenlinien durch $x =$ const. bez. $y =$ const. gegeben sind. Sie sind Parallele zu den Coordinatenaxen und also zu den Kanten der Platte.

1. Knotenlinien $x = \text{const.}$

$\sin h\pi x/a$ wird zu Null für

$$(h\pi x)/a = n\pi$$

d. h.

$$x = na/h,$$

wobei $n = 0, 1, 2 \ldots h$. Dieser Werth zeigt, dass die Knotenlinien parallel der Y-Axe *gleiche Abstände* a/h von einander haben. Die geringste Anzahl von Knotenlinien ist 2, nämlich für $h = 1$ werden allein die beiden befestigten Kanten der Platte $x = 0$ und $x = a$ Knotenlinien sein. Je grösser h, desto mehr Knotenlinien treten auf. *Die Anzahl der Knotenlinien parallel den Befestigungskanten, diese mitgezählt, ist*

$$m = h + 1.$$

2. Knotenlinien $y = \text{const.}$

Der zweite Factor v wird zu Null, wenn die particulären Lösungen v_1' v_1 v_2 [1]) einzeln zum Verschwinden gebracht werden. Man hat also drei Bedingungsgleichungen zu betrachten [2]):

$$v_1' = A' \mathfrak{Cof}(yp\sqrt{1+r^2}) + B' \mathfrak{Cof}(yp\sqrt{1-r^2}) = 0$$

$$v_1 = A \mathfrak{Cof}(yp\sqrt{r^2+1}) + B\cos(yp\sqrt{r^2-1}) = 0$$

$$v_2 = C \mathfrak{Sin}(yp\sqrt{r^2+1}) + D\sin(yp\sqrt{r^2-1}) = 0,$$

welche sich nach Eliminirung der Constantenverhältnisse A'/B', A/B, C/D mit Hülfe der Gleichungen (12), (14), (15) folgendermaassen schreiben lassen:

$$(20)\quad \begin{cases} ((c+c_1)r^2 - c)\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1-r^2})\,\mathfrak{Cof}(yp\sqrt{1+r^2}) \\ \quad + ((c+c_1)r^2 + c)\,\mathfrak{Cof}(yp\sqrt{1-r^2})\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{1+r^2}) = 0 \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} ((c+c_1)r^2 - c)\cos(pb\sqrt{r^2-1})\,\mathfrak{Cof}(yp\sqrt{r^2+1}) \\ \quad = -((c+c_1)r^2 + c)\cos(yp\sqrt{r^2-1})\,\mathfrak{Cof}(pb\sqrt{r^2+1}) \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} ((c+c_1)r^2 - c)\sin(pb\sqrt{r^2-1})\,\mathfrak{Sin}(yp\sqrt{r^2+1}) \\ \quad = -((c+c_1)r^2 + c)\sin(yp\sqrt{r^2-1})\,\mathfrak{Sin}(pb\sqrt{r^2+1}) \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen entsprechen den Gleichungen (16), (18)

---

1) v_2' war S. 15 als particuläre Lösung ausgeschlossen worden.

2) Siehe Gleichungen (10) und (11).

und (19), und die für letztere gefundenen Wurzeln r^2 sind bez. in (20), (21), (22) einzusetzen.

Für *Gleichung (20)* hat sich oben nur *ein* Werth r^2 ergeben, und zwar lag dieser in dem Bereiche $1 > r^2 > c/(c+c_1)$ (siehe S. 14), sodass

$$(c + c_1) r^2 > c$$
$$(c + c_1) r^2 - c > 0.$$

Es enthält demnach die Gleichung (20) lauter positive Glieder, kann also durch kein y befriedigt werden. Damit ist gezeigt, dass die particuläre Lösung v_1' keine Knotenlinien parallel der X-Axe liefert. Sie giebt die Grundschwingung der Platte, welche dadurch charakterisirt ist, dass die schwingende Platte *nur* Knotenlinien parallel den festen Kanten aufweist.

In *Gleichung (21)* ist zunächst zu bemerken, dass y nur im Argument von geraden Functionen auftritt. Die Gleichung ändert sich nicht, wenn y das Zeichen wechselt, was besagt, dass die Knotenlinien symmetrisch zur X-Axe liegen. Da die Gleichung ferner durch $y = 0$ nicht befriedigt wird, ist die Anzahl der Knotenlinien *stets gerade*. — Die einzelnen Wurzeln y mögen wieder, wie die r^2 in den Gleichungen (16) bis (19), graphisch bestimmt werden. Es stellt sich die linke Seite der Gleichung (21) durch eine hyperbolische, die rechte durch eine trigonometrische Cosinuslinie dar (Fig. 6). Wegen des Gliedes $\cos(pb\sqrt{r^2 - 1})$ ist die linke Seite bald positiv, bald negativ, je nach dem Werthe von r^2. Die Cosinuslinie der rechten Seite hat eine besonders wegen des Gliedes $\mathfrak{Cos}\,(pb\sqrt{r^2 + 1})$ mit r^2 wachsende Amplitude und eine Periode $2\pi/(p\sqrt{r^2 - 1})$, die mit wachsendem r^2 abnimmt. Es werden darum, je grösser r^2 wird, um so mehr Wurzeln y in das durch $y = \pm b$ abgegrenzte Bereich (in der Figur schraffirt) fallen. Die *höheren Wurzeln* r^2 geben eine *grössere Anzahl Knotenlinien* parallel den

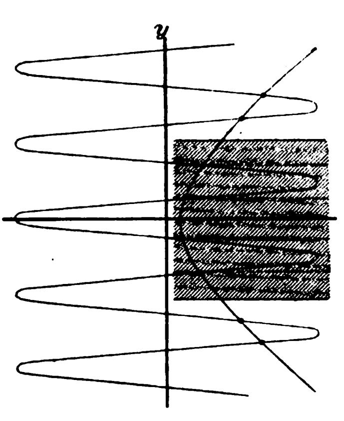


Fig. 6.

freien Plattenkanten, wie die niederen. Die ***Abstände der Knotenlinien*** untereinander sind ***nicht gleich***, aber für die höheren Wurzeln r^2 sind sie, besonders in der Mitte der Platte, wenig von einander verschieden.

Gleichung (22) enthält zwar Factoren, die mit y ihr Vorzeichen wechseln, deren Anzahl ist aber gerade, sodass auch hier ein Zeichenwechsel von y die Gleichung nicht ändert. Die Knotenlinien liegen demnach wieder symmetrisch zur X-Axe. Da die Gleichung durch $y = 0$ erfüllt wird, ist die X-Axe selbst Knotenlinie, es ist also die Anzahl der Knotenlinien bei der particulären Lösung v_2 ***stets ungerade***. Löst man die Gleichung (22) in Bezug auf y wieder graphisch, so wird die linke Seite durch eine hyperbolische Sinuslinie sich abbilden, welche je nach dem Werthe von r^2 durch das eine oder andere Paar gegenüber stehender Quadranten geht, die rechte Seite aber durch eine trigonometrische Sinuslinie. Deren Periode ist wieder $2\pi/(p\sqrt{r^2-1})$, wird also für jedes folgende, grössere r^2 kleiner werden. Die beistehende Fig. 7 giebt den Verlauf der beiden Sinuslinien. Beide Curven gehen durch den Coordinatenanfang, was der angeführten Lösung $y = 0$ entspricht. Es kann, wie oben, auch hier zusammenfassend gesagt werden: für Lösung v_2 werden die *Abstände der Knotenlinien* parallel den freien Plattenkanten für höhere Wurzeln r^2 kleiner. Sie sind einander *nicht gleich*, werden es aber um so mehr, je grösser r^2.

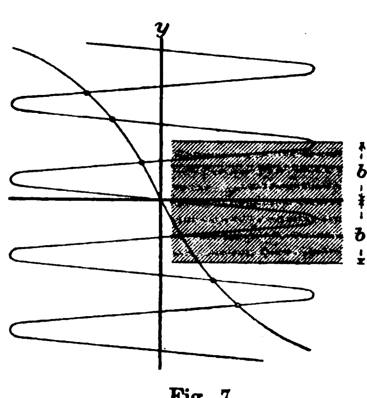


Fig. 7.

Die Erörterungen auf S. 14 haben ergeben, dass der kleinste Werth r^2 Wurzel der Gleichung (16) ist. Die folgenden Werthe sind abwechselnd Wurzeln der Gleichungen (19) und (18). Gleichung (16) hat nun aber zu einer Schwingung geführt, welche ***keine*** Knotenlinie parallel zur X-Axe hat, Gleichung (19) zu solchen, welche 1, 3, 5, 7 ..., Gleichung (18) zu solchen, welche 2, 4, 6, 8 ... Knotenlinien parallel der X-Axe besitzen. Daraus geht hervor, dass die aufsteigend ge-

ordneten Werthe r^2 der Reihe nach Schwingungen entsprechen, bei denen 0, 1, 2, 3, 4 ... Knotenlinien parallel den freien Plattenkanten auftreten. Giebt man den Wurzeln r^2 der Reihe nach die Ordnungszahlen 0, 1, 2, 3, 4 ..., so lässt sich aussprechen: *die Anzahl der Knotenlinien parallel den freien Plattenrändern ist gleich der Ordnungszahl der jeweiligen Wurzel* r^2.

Für grosse Werthe r^2 sind die Abstände E der Knotenlinien sehr nahe gleich der halben Periode der besprochenen Cosinus- bez. Sinuslinie

$$E = \pi / p \sqrt{r^2 - 1}.$$

Nun gilt aber für grosse r^2 nach S. 16, wenn die dort getrennten, auf Gleichung (18) und (19) sich beziehenden Fälle zusammengefasst werden:

$$p b \sqrt{r^2 - 1} = \frac{\pi}{4}(2n + 1).$$

Es ist dabei $n = 1, 3, 5 \ldots$ zu setzen, wenn man die Lösung der Gleichung (18) — gerade Anzahl von Knotenlinien — und $n = 0, 2, 4, 6 \ldots$ zu setzen, wenn man die Lösung der Gleichung (19) — ungerade Anzahl — haben will. Die letztere Beziehung berücksichtigend erhält man

$$E = 2b \cdot \frac{2}{2n+1},$$

d. h. *ist die Anzahl* n *der den freien Plattenrändern parallelen Knotenlinien sehr gross, so ist das Verhältniss der Abstände der Knotenlinien von einander zur ganzen Plattenbreite* $2b$ gegeben durch $2 : (2n + 1)$.

§ 4. Knotenlinien bei unendlich langer Platte.

Lässt man, indem man eine bestimmte, durch die Zahl der Knotenlinien gegebene Partiallösung beibehält, die Länge a der Platte mehr und mehr wachsen, so werden sich auch die Knotenlinien parallel den freien Kanten verschieben und einer Grenzlage zustreben. Es bietet einiges Interesse, diesen Grenzfall, für welchen die Platte in einen unendlichen Parallelstreifen von der Breite $2b$ ausgeartet ist, zu betrachten.

Die Gleichungen (19) und (18) auf S. 12 — Gleichung (16) kommt nicht in Betracht, da sie keine Knotenlinie ergab — lassen sich für den vorliegenden Fall in folgender einfachen

Weise schreiben, wenn man berücksichtigt, dass für $a/b = \infty$ auch $r^2 = \infty$ wird, wie aus den Betrachtungen S. 15 u. 16 zu ersehen ist:

$$\mathfrak{Tg}\,\alpha = +\operatorname{tg}\alpha\,, \tag{19'}$$

$$\mathfrak{Tg}\,\alpha = -\operatorname{tg}\alpha\,. \tag{18'}$$

Es ist hierbei der Kürze wegen gesetzt:

$$p b \sqrt{r^2 - 1} = p b \sqrt{r^2 + 1} = \alpha\,.$$

In gleicher Weise vereinfachen sich die zugehörigen Gleichungen (22) und (21), welche zur Bestimmung der den freien Rändern parallelen *Knotenlinien* dienen:

$$-\frac{\sin\left(\frac{y}{b}\,\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{y}{b}\,\alpha\right)}{\mathfrak{Sin}\,\alpha} \tag{22'}$$

$$-\frac{\cos\left(\frac{y}{b}\,\alpha\right)}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{Cos}\left(\frac{y}{b}\,\alpha\right)}{\mathfrak{Cos}\,\alpha} \tag{21'}$$

Es seien die Wurzeln von (19′) der Reihe nach mit $\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5 \ldots$ bezeichnet und diejenigen von (18′) mit $\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6\ \ldots$, sodass der Index von α die Zahl der Knotenlinien angiebt. Löst man die Gleichungen (19′) und (18′) auf, so findet man folgende Zahlenwerthe:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0{,}0104\,\pi \\
\alpha_2 &= 0{,}7527\,\pi \\
\alpha_3 &= 1{,}2499\,\pi \\
\alpha_4 &= 1{,}7500\,\pi \\
\alpha_5 &= 2{,}2500\,\pi \\
\alpha_6 &= 2{,}7500\,\pi \\
&\vdots \\
\alpha_k &= \frac{2k-1}{4}\,\pi
\end{aligned}$$

Die Wurzeln α mit ungeradzahligem Index sind nun in (22′) einzusetzen, die anderen in (21′), und es giebt die erstere Gleichung jene Fälle mit einer ungeraden, die letztere Gleichung die Fälle mit einer geraden Anzahl von Knotenlinien. Folgendes sind die Resultate:

		y/b			
1 Knotenlinie	0				
2 „	$+0{,}551_8$	$-0{,}551_8$			
3 „	$+0{,}735_8$	0	$-0{,}735_8$		
4 „	$+0{,}811_1$	$+0{,}288_3$	$-0{,}288_3$	$-0{,}811_1$	
5 „	$+0{,}853_1$	$+0{,}446_5$	0	$-0{,}446_5$	$-0{,}853_1$

Diese Werthe stimmen gut überein mit denjenigen, welche die Lage der Knoten eines *transversal schwingenden, an beiden Enden freien Stabes* bestimmen.[1]) Es ist diese Analogie zwischen freiem Stab und unendlichen Plattenstreifen wohl zu erklären. Man kann den unendlichen Plattenstreifen von der Breite $2b$ zerlegt denken in unendlich viele Stäbe von der Länge $2b$, welche alle in gleicher Weise schwingen, und die für die einzelnen Stäbe geltenden Knotenstellen werden auch der Gesammtheit der Stäbe, der Platte, zugehören.

§ 5. Die mehrfachen Schwingungen.

Die vielen Einzellösungen des hier vorliegenden Problems der Schwingung einer rechteckigen Platte führen jede zu einer Schwingung von bestimmter Periode, die im allgemeinen für jede Einzellösung eine andere ist. Es treten aber auch Einzellösungen auf mit der gleichen Schwingungsdauer, und diese Fälle bieten besonderes Interesse. Wegen der linearen Form der Differentialgleichung lassen sich solche ausgezeichnete Einzelschwingungen superponiren und führen zu neuen Schwingungen mit derselben Periode, die nach Voigt[2]) als *mehrfache Schwingungen* bezeichnet werden mögen.

Es sei zunächst daran erinnert, dass jede Einzellösung, ausser durch die Dimensionen und durch das Material der Platte, durch h und r^2 bestimmt ist. Für h ist eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ... zu wählen, für r^2 eine der sich für das gewählte h ergebenden Wurzeln der Gleichungen (16), (18), (19), die auf S. 17 u. f. abgedruckt sind. Dort finden sich die Werthe r^2 nur für Platten mit den Kantenverhältnissen $a/b = 1, 2, 3, 4$ berechnet. Zwischen diese Werthe möge, um

1) Vgl. z. B. die Angaben von Seebeck, Pogg. Ann. **73.** 1848 oder Violle, L. d. Phys., dt. Ausg. **2.** 1. S. 203.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. **6.** S. 230. 1893.

für beliebige Kantenverhältnisse die r^2 zu bekommen, interpolirt werden. Graphische Interpolation führt mit hinreichender Genauigkeit zum Ziel. Zu dem Zwecke werden in ein Coordinatensystem mit den Axen a/b und r^2 die sämmtlichen z. B. für $h=1$ gefundenen Wurzeln r^2 eingetragen. Es sei noch der zu $a/b=0$ gehörige Werth $r^2=1$ zugefügt, der ja die Gleichungen (16), (18), (19), welches auch h sein mag, befriedigt. Werden jetzt durch die erhaltenen Punkte Curven gelegt, sodass alle ersten Wurzeln r^2 miteinander verbunden werden, ebenso die zweiten, dritten u. s. w. Wurzeln, so erhält man eine Figur wie die nebenstehende (Fig. 8). Von einem Punkte ($a/b=0$, $r^2=1$) gehen strahlenförmig Curven aus. Die erste, nahezu senkrecht und geradlinig ansteigende Curve entspricht der einzigen Wurzel von Gleichung (16), die zweite bez. dritte der *ersten* Wurzel von (19) bez. (18), die vierte bez. fünfte der *zweiten* Wurzel von (19) bez. (18) u. s. f. Die Wurzeln r^2 für irgend ein Plattenformat a/b erhält man dann, indem man eine Parallele zur Axe der r^2 im Abstande a/b von dieser legt. Die Abscissen der Schnittpunkte sind die gesuchten Wurzeln r^2.

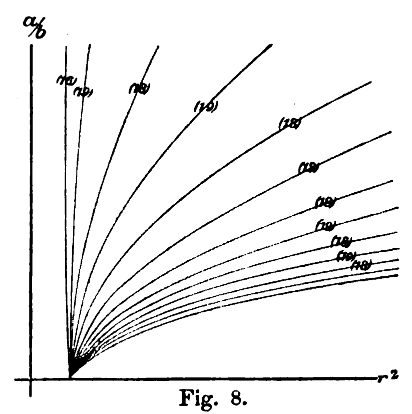


Fig. 8.

Wie für $h=1$, kann man in gleicher Weise für $h=2, 3, \ldots$ verfahren. Es ergeben sich analoge Figuren.

Die Tonhöhe für jede Einzellösung des Problems, die also durch h und r^2 festgelegt ist, ergiebt sich aus Gleichung (6). Es war die Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{r^2 h^2} \cdot \frac{2a^2}{D\pi} \sqrt{\frac{12cs}{c^2 - c_1^2}}$$

oder die Schwingungszahl $z = 1/T$ ist:

$$z = r^2 h^2 \frac{D\pi}{2a^2} \sqrt{\frac{c^2 - c_1^2}{12cs}}, \tag{23}$$

d. h. die Schwingungszahl ist proportional dem Producte $r^2 h^2$.

Wenn man nun die eben gewonnenen Figuren in der Art abändert, dass man an Stelle der r^2 die Werthe $r^2 h^2$ in die Ebene einträgt, so gewinnt man zunächst den Vortheil, dass

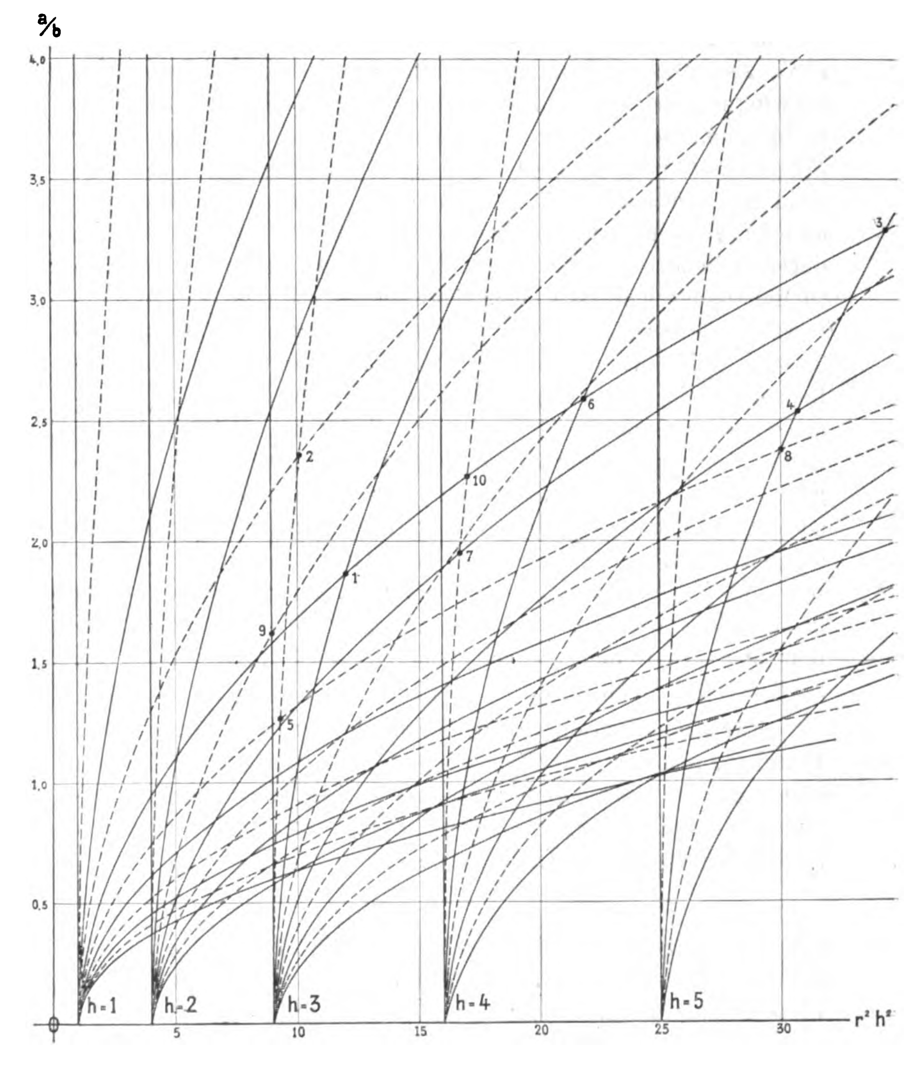


Fig. 9.

Tafel zur Aufsuchung der Kantenverhältnisse a/b, die Doppeltöne liefern. **Die ausgezogenen Curven entsprechen einer geraden Anzahl von Knotenlinien parallel den freien Kanten, die punktirten einer ungeraden Anzahl.**

sämmtliche Figuren, für $h = 1$, $h = 2$, $h = 3$ u. s. w., sich in dasselbe Coordinatensystem eintragen lassen. In Fig. 9 ist das geschehen. Ferner aber erhält man Schnittpunkte zweier oder gar mehrerer Curven, welche Kantenverhältnisse a/b angeben, für die zwei oder mehrere Einzelschwingungen dasselbe $r^2 h^2$, also nach (23) dieselbe Tonhöhe besitzen. Solche Einzelschwingungen können aber nach dem oben Gesagten zu einer mehrfachen Schwingung superponirt werden. Also giebt *jeder Schnittpunkt in Fig. 9 eine mehrfache Schwingung* an. Man sieht aus der sehr grossen Anzahl solcher Schnittpunkte, dass es sehr viele mehrfache (meist zweifache) Schwingungen giebt, deren jede an ein bestimmtes Plattenformat geknüpft ist. Natürlich hängt jede mehrfache Schwingung von dem Amplitudenverhältniss der componirenden Einzelschwingungen ab und verändert sich, wenn sich dieses Verhältniss ändert. Es ist hierdurch ein sehr weites Gebiet eröffnet. Während die Einzelschwingungen nur Knotenlinien parallel den Kanten lieferten, haben die mehrfachen Schwingungen die mannigfachsten Figuren zu Knotenlinien. Es ist sehr überraschend, auf eine so grosse Mannigfaltigkeit von complicirten Klangfiguren zu stossen, während doch die Art der Einklemmung der Platten nur das Zustandekommen einfacher Knotenfiguren vermuthen lässt. Und thatsächlich entspricht die Beobachtung durchaus den hier erhaltenen theoretischen Resultaten, wie später gezeigt werden wird.

Für Klangfiguren, die aus Parallelen zu den Plattenkanten bestehen, also ein gitterförmiges Aussehen haben, hat Chladni eine einfache Bezeichnung gewählt. Sind z. B. m Parallele zur einen und n Parallele zur anderen Plattenkante vorhanden, so bezeichnet er die Figur durch

$$m \mid n.$$

Die gleiche Bezeichnung mag hier eingeführt werden; m gebe die Anzahl der Knotenlinien parallel den festen Plattenrändern, diese selbst mit als Knotenlinien gezählt, n die Anzahl parallel den freien Kanten an. Nach § 3 ist $m = h + 1$ und n gleich der Ordnungszahl von r^2. Also wird beispielsweise durch $3 \mid 7$ diejenige Einzellösung bezeichnet, bei der $h = 2$ und r^2, ansteigend gerechnet, die 7. Wurzel ist.

Eine mehrfache Schwingung werde bezeichnet durch die additiv zusammengefassten Zeichen für die Einzelschwingungen.

Es sei darauf hingewiesen, dass Herr Tanaka[1]) bei seinem näherungsweise gelösten Problem für quadratische Platten auch zwei Einzelschwingungen überlagert. Seine „Schwesterschwingungen" sind aber einander gleich, die eine geht durch Drehen um $\pi/2$ in die andere über. Bei dem vorliegenden *völlig streng* durchgeführten Problem sind dagegen die beiden Einzelschwingungen von einander verschieden.

§ 6. Die Klangfiguren bei mehrfachen Schwingungen.

Bei einer mehrfachen Schwingung ist die Verrückung w an jeder Stelle der Platte gleich der algebraischen Summe der an derselben Stelle statthabenden Verrückungen w_α, w_β, w_γ . . . der Einzelschwingungen, also:

$$w = w_\alpha + w_\beta + w_\gamma + \cdots,$$

wobei

$$w_\alpha = v_\alpha \sin\frac{2\pi t}{T} \sin\frac{h_\alpha \pi x}{a},$$

$$w_\beta = v_\beta \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_1\right) \sin\frac{h_\beta \pi x}{a},$$

$$w_\gamma = v_\gamma \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta_2\right) \sin\frac{h_\gamma \pi x}{a}.$$

$$\vdots$$

Für die Knotenlinien ist die Verrückung gleich Null für jedes t. Das Verschwinden der Summe $w_\alpha + w_\beta + w_\gamma + \cdots$ kann aber nur dann zu jeder Zeit stattfinden, wenn die Phasendifferenzen $\delta_1 = \delta_2 \cdots = 0$ sind, und deshalb schreibt sich die Bedingungsgleichung für die Knotenstellen:

$$0 = v_\alpha \sin\frac{h_\alpha \pi x}{a} + v_\beta \sin\frac{h_\beta \pi x}{a} + v_\gamma \sin\frac{h_\gamma \pi x}{a} + \cdots \tag{24}$$

Hierin sind für die $v_\alpha\, v_\beta\, v_\gamma$ . . . der Einzelschwingungen die auf S. 10 u. 11 mit v_1', v_1 oder v_2 bezeichneten Lösungen einzuführen, je nachdem die betreffenden r^2 Wurzeln von Gleichung (16), (18) oder (19) sind, d. h. je nachdem die Ordnungszahlen der r^2

Null, gerade oder ungerade

sind. Ein *Beispiel* möge das Gesagte erläutern. Es seien zwei

1) Vgl. die Einleitung.

Einzelschwingungen[1]) 5 | 2 und 4 | 7 gegeben, welche für irgend ein Plattenverhältniss gleichen Ton haben. Für die erste ist die Ordnungszahl des r^2 gerade, also ist die Lösung v_1 zu wählen:

$$v_a = A_a \operatorname{Cof}(yp_a\sqrt{r_a^2+1}) + B_a \cos(yp_a\sqrt{r_a^2-1}).$$

Für die zweite ist die Ordnungszahl ungerade, also ist die Lösung v_2 zu nehmen:

$$v_\beta = C_\beta \operatorname{Sin}(yp_\beta\sqrt{r_\beta^2+1}) + D_\beta \sin(yp_\beta\sqrt{r_\beta^2-1}).$$

Mithin sind die Knotenlinien der Doppelschwingung durch die Gleichung gegeben:

$$0 = B_a\left(\frac{A_a}{B_a}\operatorname{Cof}(yp_a\sqrt{r_a^2+1}) + \cos(yp_a\sqrt{r_a^2-1})\right)\sin\frac{4\pi x}{a}$$
$$+ D_\beta\left(\frac{C_\beta}{D_\beta}\operatorname{Sin}(yp_\beta\sqrt{r_\beta^2+1}) + \sin(yp_\beta\sqrt{r_\beta^2-1})\right)\cos\frac{7\pi x}{a},$$

in welcher die Constantenverhältnisse A_a/B_a und C_β/D_β durch die Gleichungen (14) und (15) sich bestimmen, und dem Amplitudenverhältniss der beiden Sonderschwingungen B_a/D_β der Reihe nach Werthe zwischen $+\infty$ und $-\infty$ beizulegen sind, um die ganze Serie von Klangfiguren zu erhalten. Diese Serie wird für $B_a/D_\beta = \infty$ beginnen mit der einen Gitterfigur; dann kommen eine Reihe Zwischenfiguren, welche allmählich Aehnlichkeit mit der zweiten Gitterfigur gewinnen, bis für $B_a/D_\beta = 0$ diese selbst entsteht; für weiter abnehmendes B_a/D_β erhält man wieder Zwischenfiguren, welche nach und nach den Uebergang zur ersten Gitterfigur zurück bilden.

Für jeden Doppelton giebt es eine solche zusammenhängende Serie von Klangfiguren. Im allgemeinen ist für jeden Doppelton ein ganz bestimmtes Plattenformat nöthig, doch hat die Beobachtung gelehrt, dass auch, wenn das Plattenformat etwas von dem berechneten abweicht, eine mehrfache Klangfigur entsteht. Es sei auf die ausgeführten Versuche verwiesen.

In besonderen Fällen kann die Platte ein solches Kanten-

---

1) Im Folgenden sind immer nur die aus *zwei* Componenten bestehenden mehrfachen Schwingungen behandelt, da sie die wichtigste Rolle spielen.

verhältniss haben, dass sie nicht nur für eine, sondern für mehrere Doppelschwingungen anspricht.

Ein Blick auf die Fig. 9 lässt erkennen, dass die Schnittpunkte für grosse Werthe $r^2 h^2$ ausserordentlich zahlreich werden. Diese zahlreichen Fälle entziehen sich aber der bequemen Beobachtung, da die Erregung einer Platte bei sehr hohen Tönen äusserst schwierig ist.

Man kann sich ungefähr Aufschluss verschaffen über die Form einer Klangfigur, die bei der Superposition zweier Gitterfiguren entsteht. Denn es sind Punkte der Platte von vornherein zu bezeichnen, durch welche die resultirende Klangfigur jedenfalls geht: es sind das die Schnittpunkte der beiden übereinander gelagerten Gitterfiguren, da doch jede der Einzelverrückungen gleich Null ist, mithin auch deren Summe. Und dann lassen sich Felder auf der Platte angeben, auf welchen positive Verrückung statt hat, während gleichzeitig andere anzugebende Felder negativ verschoben sind. Zwischen solchen positiven und negativen Stellen muss nothwendigerweise eine Knotenlinie liegen. Diese Anhaltspunkte genügen zur Construction der *Form* der resultirenden Klangfigur, bezüglich der Formen einer ganzen Serie von Figuren. Als Beispiel möge hier die Zusammensetzung der beiden Schwingungen 4|2 und 2|4 dienen. Die Figuren 10*a* und 10*b* sind die beiden ihnen zu-

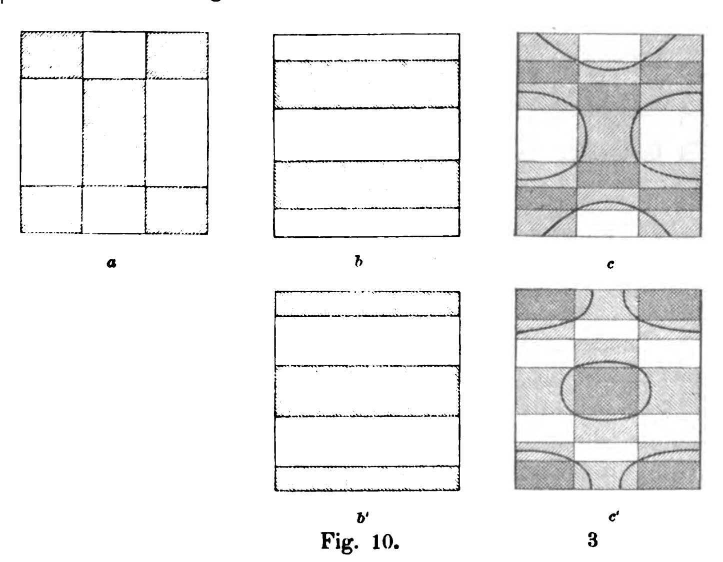


Fig. 10.

gehörigen geradlinigen Knotenfiguren. Durch Schraffiren seien die positiven Schwingungsfelder ausgezeichnet. Ueberdecken sich diese beiden Figuren (Fig. 10*c*), so entstehen acht Schnittpunkte der Knotenlinien, die jedenfalls Knotenpunkte der neuen Schwingung sind. Ausserdem entstehen eine Anzahl Felder, welche verschieden schraffirt sind: in den doppelt schraffirten Feldern wird eine positive und in den nicht schraffirten eine negative resultirende Verrückung vorhanden sein. Beide Felder sind getrennt durch einfach schraffirte Flächenstücke. Hierin werden die Knotenlinien liegen. Da letztere ausserdem durch die acht Knotenpunkte gehen müssen, haben sie etwa den in Fig. *c* gezeichneten Verlauf. Die Linien schmiegen sich mehr der einen oder anderen Gitterfigur an, je nachdem die eine Schwingung gegenüber der anderen vorherrscht, also das Amplitudenverhältniss sehr gross oder sehr klein ist. Wird letzteres negativ, so muss an Stelle der Fig. *b* die Fig. *b'* treten, in welcher die Schwingungsfelder entgegengesetzt schraffirt sind, und Fig. *c'* wird dann die resultirende Klangfigur sein. Die hier folgende Figurenreihe stellt die ganze Serie

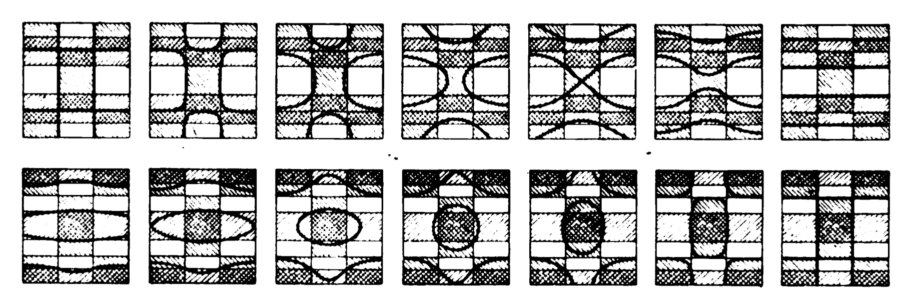


Fig. 11.

von Klangfiguren, den beiden gegebenen Einzelschwingungen 4|2 und 2|4 zugehörig, dar. Es ist das eine geschlossene Kreisfolge, die aus zwei Theilen besteht. Die Figuren des ersten Theiles zeigen den allmählichen Uebergang der einen Gitterfigur in die zweite, wobei das Amplitudenverhältniss sich von $+\infty$ bis 0 ändert. Die Figuren des zweiten Theiles geben die Rückverwandlung der zweiten Gitterfigur in die erste; das Amplitudenverhältniss ändert sich dabei von Null bis $-\infty$.

Bezüglich der *Symmetrie* zu den Coordinatenrichtungen

sind die mehrfachen Klangfiguren einzutheilen in doppelt-symmetrische, einfach-symmetrische und verkehrt-symmetrische Figuren. Eine doppelt-symmetrische Figur entsteht, wenn die Gitterfiguren beide eine gerade oder beide eine ungerade Anzahl von Knotenlinien parallel den Coordinatenaxen besitzen, wenn also $m_1 - m_2$ (oder $h_1 - h_2$), sowie $n_1 - n_2$ gerade Zahlen sind, wobei die Indices 1, 2 auf die beiden Einzelschwingungen bezogen sind. Ist nur eine dieser Differenzen eine gerade Zahl, so ist die Klangfigur einfach-symmetrisch, sind sie beide ungerade, so ist sie verkehrt-symmetrisch, d. h. es bedarf einer doppelten Spiegelung, um eine Hälfte der Figur mit der anderen zur Deckung zu bringen. Nur für den Fall doppelter Symmetrie kommen in einer Serie von Figuren Wiederholungen nicht vor. Bei einfacher und verkehrter Symmetrie sind in jeder Serie die Figuren des zweiten Theiles Spiegelbilder der Figuren des ersten Theiles.

Auf Taf. I sind für neun verschiedene Doppelschwingungen die Klangfiguren aufgezeichnet. Vier dieser Serien zeigen doppelte Symmetrie, dann folgen einfach- und vertical-symmetrische Figuren. Die Fälle mit doppelter Symmetrie sind vollständig durchgeführt, bei den anderen ist der zweite Theil jeder Serie, der keine neuen Figuren liefert, weggelassen. Die Nummerirung der Serien stimmt mit derjenigen der Schnittpunkte in Fig. 9 überein.

Eine Anzahl der gezeichneten Figuren findet man unter den Reproductionen von beobachteten Klangfiguren auf Taf. II wieder.

Die drei Doppelschwingungen:

$$2|5 + 4|1,$$
$$4|1 + 3|4,$$
$$3|4 + 2|5$$

setzen Platten mit nahe dem gleichen Kantenverhältniss voraus. Also können sich diese Schwingungen überlagern zu einer dreifachen Schwingung:

$$2|5 + 4|1 + 3|4.$$

Jede einzelne Figur dieser dreifachen Schwingung ist dann durch das Verhältniss dreier Constanten bestimmt. Ich habe es, wie schon erwähnt, in dieser Arbeit unterlassen, auf diese drei- oder gar mehrfachen Schwingungen näher einzugehen.



Zweiter Theil.

Die Beobachtungen.

§ 7. Die Klangplatten und ihre Befestigung.

Zu *Klangplatten* werden sowohl Metallplatten als Glasplatten empfohlen. An sich ist das Material gleichgültig. Es muss nur so beschaffen sein, dass sich aus ihm eine Platte anfertigen lässt, bei welcher die in der Theorie gestellten Bedingungen nach Möglichkeit realisirt werden, und diese fordern, dass die Platte eben und überall gleich stark sei, möglichst dünn sei, aus homogenem Material bestehe und endlich hinreichend Steifigkeit besitze, sodass sie sich bei dem durch die festen, federnden Wände ausgeübten Druck nicht biegt. Die käuflichen Metallbleche haben jedenfalls, wegen ihrer Herstellung durch den Walzprocess, eine Structur, bei welcher die Walzrichtung eine ausgezeichnete Rolle spielt und sind nicht ohne weiteres zu verwenden. Es kann vielleicht gelingen, aus einem Blechstück durch wiederholtes Ausglühen und darauf folgendes gleichmässiges Bearbeiten mit dem Hammer eine Metallplatte zu verfertigen, welche nach verschiedenen Richtungen gleichartiges Verhalten zeigt. Ich habe in dieser Art und Weise eine Messingplatte vorrichten lassen, welche aber zu stark im Verhältniss zu ihrer Grösse ausfiel. Sicherlich hätte es besonderer Geschicklichkeit bedurft, um ihre Stärke noch weiter zu reduciren, ohne dabei aber der Platte ihre ebene Gestalt zu nehmen. Viel bequemer als Metall ist *Glas* in der geforderten Plattenform zu erhalten, und ich habe dieses als Material für meine Klangplatten bevorzugt. Aus einer sehr grossen Anzahl dünner, geschliffener Spiegelglasscheiben von 1 bis 2 mm Dicke, die ich zum Theil von der „Deutschen Spiegelglas-Actien-Gesellschaft zu Grünenplan", zum Theil von Herrn Mechaniker Brunée in Göttingen bezog, suchte ich die in Stärke und Aussehen gleichmässigsten Scheiben heraus. Aus ihnen wurden die rechteckigen Klangplatten herausgeschnitten. Zur Beurtheilung, inwieweit es mir gelungen ist, Platten von überall gleicher Stärke zu erhalten, sei folgendes über die Dickenmessung einer von mir viel benutzten, mit „*J*" bezeichneten Platte mitgetheilt. Es wurde an 35 über die

ganze Platte gleichmässig vertheilten Stellen die Dicke gemessen; es ergab sich

ein grösster Werth von	0,947 mm
ein kleinster Werth von	0,922 mm
Differenz beider:	0,025 mm.

Der Mittelwerth betrug 0,935 mm.

An keiner der von mir ausgewählten Platten habe ich eine störende Ungleichartigkeit im Material durch meine Schwingungsbeobachtungen zu entdecken Gelegenheit gehabt.

Das Bearbeiten der Kanten der Platten hat Herr Brunée in dankenswerther Weise sehr vollkommen ausgeführt. Die beiden angestemmten Kanten der Platten waren keilförmig zugeschärft, wie es der Querschnitt *a* zeigt. Der Keilwinkel variirte bei den verschiedenen Platten zwischen 60° und 90°. Die beiden freien Kanten waren abgerundet, aber nur wenig, wie Querschnitt *b* zeigt.

a

b

Fig. 12.

Die *Befestigung der Klangplatten* geschah mittels eines Apparates, welchen Herr Prof. Voigt nach seinen Angaben hat anfertigen lassen, und welchen er mir zur Verfügung zu stellen die Freundlichkeit hatte. Eine Reihe federnder, dicht nebeneinander befestigter Messingstreifen bilden eine aufrecht stehende, an ihrem oberen Theile mässig federnde Wand. Zwei solcher elastischer Wände lassen sich an ein eisernes Untergestell, einander gegenüberstehend, anschrauben. Die Entfernung beider kann verändert werden. Zwischen diese Wände, welche an den einander zugekehrten Flächen mit Leder beklebt sind, wird die Klangplatte geklemmt. Durch vier Fussschrauben am Untergestell lässt sie sich horizontal stellen.

Ich setzte den Apparat beim Beobachten auf ein massives, hölzernes Gestell, welches unmittelbar auf die Platte eines Gauss'schen Statives geschraubt war und eine solche Form hatte, dass die vordere Kante der Klangplatte ungehindert mit einem vertical geführten Violinbogen gestrichen werden konnte. Dabei war Sorge getragen, dass der ganze Apparat hinreichend fest stand. Ich habe auch nicht bemerkt, dass er an den Schwingungen der Klangplatte irgendwie Theil nahm.

Die *Erregung der Platten* zu Schwingungen führte ich in der üblichen Weise mit dem Violinbogen aus, indem ich eine der freien Kanten, welche eben zu diesem Zwecke etwas abgerundet waren, anstrich. Die Anstreichstelle befand sich meist in der Mitte der gestrichenen Kante. Die von Herrn Melde empfohlene Methode, die Platten durch Streichstäbchen zu erregen, mag vor der hier benutzten manche Vorzüge haben. Aber die angekitteten Streichstäbchen, selbst wenn sie klein sind, sind sicher von Einwirkung auf die Schwingungsart der Platte und ändern also das ganze Problem. Ich blieb darum beim Violinbogen.

Zur Hervorbringung der verschiedenen Schwingungsweisen an einer Platte musste diese an geeigneten Punkten festgehalten werden. Es war die Einrichtung getroffen, dass sich unter die Platte kleine, in Höhe verstellbare, mit Spitzen aus hartem Holze versehene Füsschen schieben liessen. Zuweilen genügten solche Unterstützungen von unten her, zuweilen musste noch von oben her mit einem zugespitzten Holzstab (etwa einem Federhalter) gegen das Füsschen gedrückt werden. Oft war es auch vollständig ausreichend, wenn mit dem Holzstab allein von oben her gelinde gedämpft wurde. Zur Festhaltung von Randpunkten besass ich federnde Metallstreifen, die durch Vermittelung von Holzklötzen am eisernen Untergestell befestigt werden konnten (vgl. Fig. 13). Die Streifen hatten Ansätze aus hartem Holze, in welche eine Kimme eingefeilt war. Diese Kimme wurde gegen die Kante der Klangplatte gedrückt. Da die Kimme nicht aus zwei eingefeilten Flächen, sondern aus zwei stumpfen Keilstückchen bestand, wurde nur ein sehr kleiner Bereich der Plattenkante an transversaler Bewegung gehindert.

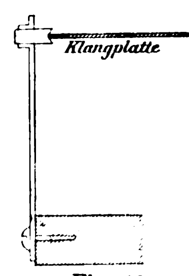


Fig. 13.

Durch aufgestreuten staubfreien Sand wurden die Knotenlinien sichtbar gemacht. Sie treten sehr scharf hervor, wenn man nur wenig und nicht zu feinkörnigen Sand[1]) anwendet. Es sei erlaubt, darauf hinzuweisen, dass beim Aufstreuen des Sandes ein kleiner Haarpinsel bessere Dienste leistet wie ein

1) Ich habe den unter dem Namen „Zinnsand" käuflichen benutzt.

Sieb. Man hebt mit ihm aus dem Sandgefäss eine hinreichende Portion Sand heraus, die man durch leichtes Klopfen in bequemer Weise dünn über die Platte vertheilen kann.

§ 8. Allgemeines über die Ausführung der Versuche.

Die Versuche erstrecken sich auf die Beobachtung der *Knotenfiguren* bei den verschiedenen Schwingungen und die Beobachtung der entstehenden *Töne.*

Die einfache Art der *Knotenfiguren bei den Einzelschwingungen* gestaltet zunächst auch deren Beobachtung sehr einfach. Hier sind nur die Abstände der kantenparallelen Knotenlinien voneinander und von den Plattenkanten zu messen.

Schwieriger ist die Ausmessung der krummlinigen *Klangfiguren mehrfacher Schwingungen,* sodass eine Vergleichung mit den theoretischen Ergebnissen ermöglicht wird. Man wird mit einer Aufzeichnung der beobachteten Figuren beginnen. Diese Aufzeichnung habe ich auf verschiedenem Wege probirt, mit Hülfe von Coordinatenpapier, eines Storchschnabels und um die Figuren in möglichst objectiver Weise zu fixiren, auch auf photographischem Wege. Da ich gläserne Klangplatten verwandte, konnte ich die Sandfiguren durch untergelegtes lichtempfindliches Papier wie ein photographisches Negativ copiren. Ich habe jedoch gefunden, dass in mehrfacher Hinsicht vortheilhafter als das letzte Verfahren die gewöhnliche photographische Aufnahme ist. Und diese hat mir schliesslich auch allein zur Aufzeichnung meiner Sandfiguren gedient. Eine photographische Camera mit vertical nach unten gerichtetem Objective war in einer solchen Entfernung von der Klangplatte befestigt, dass ein photographisches Bild in ca. siebenfacher Verkleinerung zu Stande kam. Während der photographischen Aufnahme war unter die gläserne Klangplatte eine mit schwarzem Tuche bezogene Papptafel geschoben.

Da auf den photographischen Bildern die Kanten der Klangplatten nicht scharf ausgeprägt oder infolge einseitiger Beleuchtung scheinbar verschoben zu sein pflegen, brachte ich auf der Oberfläche jeder Platte, nahe den Ecken, Marken an, indem ich kleine runde Papierplättchen aufklebte und auf diese durch je zwei von den Kanten genau 10 mm abstehende Striche ein kleines Kreuz zeichnete. Eine solche Marke mit

Kreuz bezeichnete auch den Mittelpunkt der Klangplatte. Es war anzunehmen, dass eine Beeinflussung der Schwingungen durch diese sehr kleinen Marken nicht eintrat.

Die gewonnenen photographischen Bilder mussten ausgemessen werden. Ich habe bei einigen Bildern versucht, mit Hülfe zweier zu einander rechtwinklig gelagerter Kathetometer für Punkte der Knotenlinien die Coordinaten auszumessen, die dann mit den aus der Rechnung sich ergebenden Coordinatenwerthen zu vergleichen wären. Dieses ganze Verfahren ist nun äusserst zeitraubend, besonders wenn man bedenkt, dass aus der beobachteten Doppelfigur zunächst das muthmaassliche Intensitätsverhältniss der beiden componirenden Einzelschwingungen zu bestimmen ist und dieses dann erst die theoretischen Coordinatenwerthe zu berechnen gestattet. Geht man aber umgekehrt von der theoretischen Figur, also einem bestimmten Amplitudenverhältniss aus und sucht durch geeignete Dämpfung und geeignetes Erregen auf der Klangplatte die nämliche Figur zu erzeugen, so wird man ungleich rascher zum Ziele kommen. Dieser letztere Weg wurde von mir eingeschlagen. Die berechnete Figur war auf ein Blatt Papier von der Grösse der Klangplatte aufgezeichnet. Diese Zeichnung hielt ich unter die Klangplatte und verglich ihre Uebereinstimmung mit der Sandfigur. War diese Uebereinstimmung möglichst vollständig erreicht, *photographirte ich die Sandfigur sammt der Zeichnung*, um das gewonnene Resultat festzulegen. Diese so erhaltenen Photographien lassen in sehr anschaulicher Weise die geforderte Vergleichung zu, und ich gebe in der vorliegenden Arbeit diese Abbildungen an Stelle von Zahlentabellen wieder.

Hinsichtlich der Ausführung sei noch eine Mittheilung gemacht. Es musste vermieden werden, dass die berechnete Figur die Sandfigur durch Ueberdeckung unklar werden lässt. Deshalb war erstere nicht in Linien ausgezogen, sondern bestand aus den einzelnen berechneten Punkten. Ich benutzte mattschwarzes Papier, auf das ich kleine weisse Kreisflächen so zeichnete, dass deren Centra mit den berechneten Punkten zusammen fielen. Die schwarzen Papierblätter waren genau in der Grösse der betreffenden Klangplatte geschnitten und wurden mit Hülfe einer Papptafel bei der photographischen Aufnahme leicht von unten her gegen die Klangplatte gedrückt,

wobei sorgfältigst die Uebereinstimmung der Grenzen von Papierblatt und Glasplatte beachtet wurde.

Ausser den Klangfiguren waren die *Töne* der schwingenden Platten zu beobachten. Ich benutzte eine Anzahl sehr guter, von König in Paris bezogener Stimmgabeln und ein Monochord. Auf dem Monochord reproducirte ich, und zwar immer mehrere Male in unabhängiger Weise nacheinander, sowohl den zu beobachtenden Ton als auch den Ton einer geeignet scheinenden Stimmgabel und maass die zugehörigen Saitenlängen. In den Beobachtungsresultaten sind die gemessenen Saitenlängen nicht mit angegeben, sondern gleich die aus ihnen berechneten Schwingungszahlen (die Anzahl *ganzer* Schwingungen in der Secunde). Diese einfache Methode der Tonhöhebestimmung giebt recht befriedigende Resultate, sobald man sich nur etwas eingeübt hat. Ich erhielt bei Beobachtungen desselben Tones, falls dieser klar hervortrat, Abweichungen von weniger als $^1/_2$ Procent. — Ich habe auch versucht, nach der von Herrn Melde[1]) angegebenen Methode die Schwingungszahl direct zu bestimmen, bin aber nach kurzer Zeit zum Monochord zurückgekehrt, mit welchem ich viel rascher und dabei doch hinreichend genau arbeiten konnte.

§ 9. Die Elasticitätsconstanten.

Zur Auflösung der Gleichungen (16) bis (19) war bereits das Verhältniss der Elasticitätsconstanten c und c_1 nöthig, zur Berechnung von z nach Gleichung (23) werden auch die absoluten Werthe von c und c_1 gebraucht. Für Glas sind von Hrn. Prof. Voigt sehr genaue Beobachtungen ausgeführt worden.[2]) Er fand bei Stäbchen, die aus dem Innern einer starken Tafel „rheinischen Spiegelglases“ geschnitten waren, für den Biegungswiderstand E und den Drillungswiderstand T die Werthe

$$E = 735\,8000,$$
$$T = 304\,4000.$$

Es ist hierbei das Gewicht eines Grammes als Kraft- und das Millimeter als Längeneinheit zu Grunde gelegt. Für „grünes

1) Melde, Wied. Ann. **51.** S. 669. 1894.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **15.** S. 496. 1882.

Glas“ fand Hr. Voigt etwas andere Werthe, die aber wohl hier ausser Betracht bleiben können, da ich durchgehends weisses Spiegelglas bei meinen Versuchen benutzte.

Für eine meiner Klangplatten, mit E bezeichnet und von der Spiegelglasgesellschaft zu Grünenplan bezogen, habe ich selbst nach der von Voigt durchgebildeten, mehrfach beschriebenen und benutzten Methode[1]) die Werthe E und T bestimmt. Ich liess aus derselben Glastafel, aus welcher die Platte herausgeschnitten war, mehrere etwa 80 mm lange und 6 mm breite Stäbchen in verschiedener Orientirung schneiden und unterwarf diese Stäbchen der Biegung und Torsion. Es bezeichne B und D Breite und Dicke der Stäbchen und die Einheiten seien wieder Grammgewicht und Millimeter. Die Resultate lauten:

Stäbchen I	$D = 1{,}054$ $B = 5{,}90$	$E = 705\,3000$	$T = 293\,6000$
Stäbchen II	$D = 1{,}057$ $B = 5{,}86$	$E = 719\,3000$	$T = 298\,0000$
Stäbchen III	$D = 1{,}047$ $B = 5{,}85$	$E = 718\,5000$	$T = 299\,1000$
Stäbchen IV	$D = 1{,}059$ $B = 5{,}88$	$E = 717\,5000$	$T = 296\,9000$

Mittelwerth $E_m = 716\,5000$ $T_m = 296\,9000$.

Da der Werth E beim ersten Stäbchen ausserordentlich abweichend gegenüber den anderen ist, und ich Grund hatte, diese Abweichung durch meine anfängliche Unsicherheit in der Beobachtung zu erklären, ist bei der Bildung des Mittelwerthes E_m dem E des ersten Stäbchens nur das halbe Gewicht beigelegt.

Meine Resultate zeigen keine schlechte Uebereinstimmung mit den Voigt'schen. Gleichwohl gebe ich ihnen nicht den Vorzug, weil sicherlich das von mir benutzte Material nicht so gleichartig war wie jenes, welches aus dem Innern einer grösseren Glasmasse stammte; wenngleich bemerkt werden mag, dass auch meine Stäbchen keine Oberflächenschichten mehr enthielten, da ja doch beim Schleifen einer Glastafel — und

1) W. Voigt, Wied. Ann. Ergbd. 7. S. 185. 1875; 31. S. 474. 1887 u. a. m.

ich hatte geschliffenes Glas — eine beträchtlich starke Schicht der ursprünglichen Oberfläche der Glastafel entfernt wird. Ich glaubte berechtigt zu sein, die Mittelwerthe aus den Voigt'schen und meinen Resultaten zu bilden:

$$E + 726\,2000 \qquad T = 300\,7000$$

und habe diese Mittelwerthe im Folgenden benutzt. Mit Hülfe der Relationen

$$c = \frac{4\,T - E}{3\,T - E} \cdot T \qquad c_1 = \frac{E - 2\,T}{3\,T - E} \cdot T$$

erhält man aus ihnen für die Constanten c_1 und c:

$$c = 814\,7000 \qquad c_1 = 213\,3000,$$

welche Werthe durch Multiplication mit 981 . 100 in absolute Einheiten übergeführt werden:

$$c = 799{,}2 \,.\, 10^9 \qquad c_1 = 209{,}3 \,.\, 10^9.$$

Das Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten ergiebt sich hiernach zu $c/c_1 = 3{,}82$.

Im Anschluss an diese Hülfsbeobachtung der Elasticität sei die Bestimmung der *Dichte ε des Glases* angeführt. Ich habe sie von derselben Glasplatte E bestimmt und fand für zwei verschiedene Stücke:

Erstes Stück	ε = **2,5100**
Zweites Stück	**2,5098**
Mittelwerth	**2,5099**

Die Glasplatte E zersprang, als nur erst wenige Schwingungsbeobachtungen mit ihr ausgeführt waren. Ich benutzte darauf vorzugsweise die Klangplatte J. Für deren Substanz fand ich die Dichte:

Erstes Stück	ε = **2,5064**
Zweites Stück	**2,5072**
Drittes Stück	**2,5081**
Mittelwerth	**2,5072**

§ 10. Ausmessung einiger Knotenfiguren bei einfachen Schwingungen.

Es sind im Folgenden die Abstände der Knotenlinien parallel den *freien* Plattenkanten mit der Rechnung verglichen.

Die Abstände der Knotenlinien parallel den *festen* Kanten sollen, der Rechnung gemäss, einander gleich sein. Durch die Beobachtung wurde dies insofern bestätigt, als ich nur dann Figuren mit Knotenlinien parallel den festen Kanten erhielt, wenn ich die der Rechnung entsprechend ruhenden Punkte der freien Plattenkanten (also Punkte, welche diese Kanten in zwei, oder drei, oder vier u. s. w. gleiche Theile theilen) durch die oben besprochenen Randklammern festhielt. Ein exactes Ausmessen der Abstände dieser Knotenlinien parallel den festen Kanten konnte nicht erfolgen, denn man erhält keine scharf ausgeprägten Knotenlinien, wie aus den Fig. 4, 5, 6 auf Taf. II zu erkennen ist.

Anders verhält es sich mit den Fällen, in denen nur Knotenlinien parallel den *freien* Kanten auftreten, in denen also $h = 1$ ist. Man sieht bei den ersten drei Figuren der Tafel II, bei denen dies der Fall ist, scharfe Linien, deren Abstände sich genau beobachten lassen. Ich habe diese Fälle $h = 1$ wegen der Möglichkeit einer scharfen Beobachtung bevorzugen müssen und hier nur Figuren mit Knotenlinien parallel den freien Plattenrändern ausgemessen.

In dem Falle, dass eine ungerade Anzahl von Knotenlinien parallel den freien Kanten auftritt, geht bei allen Beobachtungen die mittlere Knotenlinie mit grosser Genauigkeit durch den Mittelpunkt der Klangplatte, wie verschiedene der Figuren auf Tafel II zeigen. Es konnte darum unterlassen werden, die mittlere Knotenlinie in den Beobachtungsmittheilungen aufzuführen.

Es sind die Abstände A der Knotenlinien von der jeweils nächsten freien Plattenkante gemessen worden und zwar je an 5—7 Stellen. Dies war nothwendig, weil die Knotenlinien meist leicht wellenförmig gebogen waren. Ich gebe besonders der unvollkommenen Art der Erregung die Schuld hiervon. Denn zuweilen konnte ich bemerken, dass die Knotenfigur eine kleine Aenderung erfuhr, sobald eine andere Anstreichstelle gewählt wurde. Die mitgetheilten Zahlen sind Mittelwerthe aus den 5—7 Einzelmessungen, in Millimetern ausgedrückt. Die Länge der freien Kanten a, der angestemmten Kanten b und die Dicke D der Platte sind ebenfalls in Millimetern angegeben.

Klangplatte *J*.

Dimension: $a = 279{,}2$ $b = 87{,}98$ $D = 0{,}935$.

Schwingung					
Schwingung 2|3 (drei Knotenlinien		A = 23,67	23,87	
„ 2|3 „ „		23,56	23,96	
„ 2|4 (vier Knotenlinien)	16,85	62,23	62,75	17,23
„ 2|4 „ „	16,91	62,37	62,70	17,18
„ 2|4 (die andere freie Kante wurde mit dem Violinbogen gestrichen)	16,82	62,68	62,44	16,72
„ 2|5 (fünf Knotenlinien)	12,89	48,30	49,01	13,38
„ 2|5 (die andere Kante gestrichen)	13,10	48,67	48,55	12,98
„ 5|2		39,11	39,21	

Klangplatte *M*.

Dimension: $a = 176{,}7$ $b = 88{,}95$ $D = 0{,}936$.

Schwingung				
Schwingung 2|3 (drei Knotenlinien)		A = 23,74	24,08	
„ 2|4 (vier „)	17,10	63,00	63,56	17,08
„ 2|5 (fünf „)	12,94	49,06	49,40	13,46

Bildet man die Differenzen der beobachteten A und der halben Plattenbreite b, so bekommt man die Werthe y, d. s. die Abstände der Knotenlinien von der X-Axe, der Mittellinie der Platte. y/b ist das Verhältniss dieses Abstandes zur halben Plattenbreite. In der folgenden Zusammenstellung sind diese Werthe y/b gebildet und es sind hierbei die gleichartigen Beobachtungen zusammengefasst:

Klangplatte *J*.

$a/b = 3{,}173$.

Schwingung			
Schwingung 2|3 (drei Knotenlinien)	0	± 0,729₉	
„ 2|4 (vier „)	± 0,289₃	± 0,807₅	
„ 2|5 (fünf „)	0	± 0,4472	± 0,851₂
„ 5|2 (zwei „)	± 0,554₉		

Klangplatte *M*.

$a/b = 1{,}987$.

Schwingung			
Schwingung 2|3 (drei Knotenlinien)	0	± 0,731₂	
„ 2|4 (vier „)	± 0,288₆	± 0,807₉	
„ 2|5 (fünf „)	0	± 0,446₅	± 0,851₆

Es seien nun den Beobachtungen die aus der Theorie sich ergebenden Resultate gegenüber gestellt. Die Auflösung der Gleichungen (21) und (22) (S. 22) in der in § 3 angegebenen Weise führt zu folgenden Werten y/b, welche auf Grund der Annahme $c/c_1 = 3$ berechnet wurden:



a/b	Ton	h	r^2	y/b		
3,173	2|3	1	17,25	0	$\pm 0{,}732_0$	
3,173	2|4	1	32,0	$\pm 0{,}286_1$	$\pm 0{,}818_9$	
3,173	2|5	1	53,5	0	$\pm 0{,}439_7$	$\pm 0{,}842_4$
3,173	5|2	4	1,533	$\pm 0{,}537_3$		
1,987	2|3	1	7,62	0	$\pm 0{,}730_2$	
1,987	2|4	1	13,28	$\pm 0{,}286_0$	$\pm 0{,}811_6$	
1,987	2|5	1	21,3	0	$\pm 0{,}442_3$	$\pm 0{,}849_9$

Es ist darnach eine gute Uebereinstimmung dieser berechneten Werthe y/b mit den beobachteten zu erkennen.

§ 11. Beobachtungen der Knotenfiguren von Doppelschwingungen.

Es sind auf Taf. II die von mir beobachteten Knotenfiguren der drei Doppelschwingungen

$$2|3+4|1 \qquad 2|4+6|2 \qquad 2|3+4|2$$

abgebildet. Jede Doppelschwingung ist durch einen Schnittpunkt der Curven in Fig. 9 S. 29 bestimmt. Um mit grösserer Genauigkeit die Coordinaten der Schnittpunkte zu erhalten, als durch Entnehmen aus der Zeichnung möglich ist, wurden für die drei vorliegenden Fälle in der Nähe der Schnittpunkte Curvenpunkte genau berechnet. Durch graphische Interpolation gelangt man dann zu den genaueren Werthen der Schnittpunktscoordinaten, wie folgt:

	a/b	$r^2 h^2$
Ton 2|3	$a/b =$ 2,34	$r^2 h^2 =$ 9,990
	2,37	10,207
Ton 4|1	2,34	10,099
	2,37	10,127
folglich Schnittpunkt 2|3 + 4|1	$a/b =$ 2,357	$r^2 h^2 =$ 10,113
Ton 2|4	$a/b =$ 3,28	$r^2 h^2 =$ 34,29
	3,29	34,49
Ton 6|2	3,28	34,34
	3,29	34,39
Schnittpunkt 2|4 + 6|2	$a/b =$ 3,283	$r^2 h^2 =$ 34,352
Ton 2|3	$a/b =$ 3,16	$r^2 h^2 =$ 17,104
	3,20	17,501
Ton 4|2	3,16	17,191
	3,20	17,368
Schnittpunkt 2|3 + 4|2	$a/b =$ 3,175	$r^2 h^2 =$ 17,259

Für die ersten beiden Doppelschwingungen ist der Berechnung die Annahme $c/c_1 = 3$ zu Grunde gelegt, für die letzte ist der aus der Bestimmung der Elasticitätsconstanten sich ergebende Mittelwerth $c/c_1 = 3{,}8$ angenommen. Dass eine selbst beträchtliche Aenderung von c/c_1 die Schnittpunktscoordinaten nur wenig ändert, sei durch folgende Zahlen dargethan. Man erhält für den Schnittpunkt $2|3 + 4|2$, wenn

$$c/c_1 = 3{,}8: \quad a/b = 3{,}175, \quad r^2 h^2 = 17{,}259.$$
$$= 6{,}0: \quad = 3{,}210, \quad = 17{,}650.$$

Zu den angeführten Beobachtungen seien noch einige Bemerkungen gemacht:

Doppelschwingung $2|3 + 4|1$.

Die benutzte Platte E hatte das Kantenverhältniss $a/b = 2 \cdot 36$. Es sind mit ihr nur wenige Beobachtungen ausgeführt worden, da die Platte nach kurzem Gebrauche zersprang. Bei keiner der Beobachtungen habe ich die Schwingungszahl gemessen.

Doppelschwingung $2|4 + 6|2$.

Die benutzte Platte J hatte das Kantenverhältniss $a/b = 3{,}173$, während eigentlich die beobachtete Doppelschwingung das Verhältniss $a/b = 3{,}283$, also eine längere Platte erforderte. Trotzdem gab die Platte die ganze Reihe von Knotenfiguren für den Doppelton $2|4 + 6|2$. Die Platte hat sich dieser Doppelschwingung angepasst. Diese eigenthümliche Art der Accomodation scheint darauf zu beruhen, dass diejenigen Theile der Klangplatte nur äusserst geringe transversale Elongationen ausführen, welche sich nahe den festen Kanten befinden. Eine Platte, für welche, wie im vorliegenden Falle, die Kanten a zu klein sind, besitzt daher ideale feste Kanten, welche ausserhalb der Platte liegen, während ihre thatsächlich befestigten Kanten noch äusserst geringe Verrückungen erleiden. Somit kann eine etwas kürzere Platte eine längere vertreten. Analog ist der andere Fall, dass eine längere Platte wie eine kürzere schwingt.

Jeder der beobachteten Figuren ist die beobachtete Schwingungszahl z beigesetzt. Diese Schwingungszahlen zeigen Abweichungen voneinander bis zu ca. 4 Procent. Die Abweichungen müssen wohl besonders dem Umstande zugeschrieben werden, dass die entstehenden Töne häufig unrein sind, wahr-

scheinlich infolge der, trotz aller Vorsicht, etwas gewaltsamen Art, wie Randpunkte und innere Punkte der Platte festgehalten wurden.

Zu Fig. 16 ist zu bemerken, dass sich ein sehr scharf ausgeprägter Schnitt zweier Knotenlinien zeigt. Es haben Strehlke, Savart u. a. die Ansicht vertreten, dass sich Knotenlinien nie schneiden. Für das hier behandelte Problem ist durch die Fig. 3 jedenfalls gezeigt, dass dieser Satz nicht unbeschränkt ausgesprochen werden kann.

Doppelschwingung $2 \mid 3 + 4 \mid 2$.

Die Klangplatte war die zur vorhergehenden Serie benutzte, hatte also ein Kantenverhältniss, das möglichst genau mit dem unter der Annahme $c/c_1 = 3{,}8$ berechneten übereinstimmte. Es sind den *beobachteten* Klangfiguren dieser Serie die *berechneten* mit beigefügt, nach der auf S. 41 geschilderten Weise, und der Beschauer kann sich unmittelbar ein Urtheil über die Uebereinstimmung bilden.

Die Berechnung der Klangfiguren war in § 6 besprochen worden. Für den vorliegenden Fall $2 \mid 3 + 4 \mid 2$ schreibt sich die Gleichung der Knotenlinien:

$$D K_1 \sin \frac{\pi x}{a} + B K_2 \sin \frac{3 \pi x}{a} = 0$$

wenn bedeutet:

$$K_1 = - 0{,}02003\, \mathfrak{Sin}\left(4{,}274 \frac{y\pi}{a}\right) + \sin\left(4{,}033 \frac{y\pi}{a}\right)$$

$$K_2 = - 0{,}004992\, \mathfrak{Cof}\left(5{,}124 \frac{y\pi}{a}\right) + \cos\left(2{,}874 \frac{y\pi}{a}\right).$$

Die Gleichung zerfällt in die beiden einzelnen Gleichungen:

$$\sin \frac{\pi x}{a} = 0$$

$$\frac{a}{\pi} \arcsin\left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{B} \cdot \frac{K_1}{K_2} + 3}\right) = 0\,,$$

deren erstere die für jedes Amplitudenverhältniss D/B bestehenden Knotenlinien $x = 0$ und $x = a$ (d. s. die angestemmten Kanten) liefert; deren letztere dagegen die mit dem D/B wechselnden Knotenfiguren angiebt. Ich habe dem Amplitudenverhältniss nacheinander die Werthe beigelegt

$$D/B = +\infty\,, \quad +5\,, \quad +2\,, \quad +1\,, \quad +1/2\,, \quad 0$$

und für jeden dieser Fälle eine hinreichende Anzahl zusammengehöriger Werthepaare x, y berechnet, die dann in ein Co-

ordinatensystem eingetragen wurden. Negative Werthe D/B hätten zu keinen anderen Figuren geführt und sind weggelassen.

Die Abbildungen zeigen eine recht befriedigende Uebereinstimmung der berechneten Klangfiguren mit den beobachteten. Manche der kleinen Abweichungen darf wohl durch die Inhomogenität des Materials der Platte und deren verschiedene Dicke erklärt werden. Dass beide Factoren wirksamen Einfluss haben, geht daraus hervor, dass die Sandfiguren nicht durchaus symmetrisch sind.

Den Figuren sind wiederum die beobachteten Schwingungszahlen z beigefügt.

§ 12. Vergleichung der beobachteten und berechneten Schwingungszahlen.

Die meisten Beobachtungen von Schwingungszahlen habe ich an der Klangplatte J, für welche $a/b = 3{,}173$ war, ausgeführt. Sie seien im Einzelnen hier mitgetheilt:

Ton	z	Mittelwerth z
2 | 2	214	214
2 | 3	509	509,4
	506	
	515	
	513	
	510	
	508	
	508	
	506	
2 | 3 + 4 | 2	506	501,8
	512	
	512	
	500	
	490	
	491	

Ton	z	Mittelwerth z
4 | 2	488	488,0
	490	
	485	
	489	
2 | 4	949	940,7
	938	
	945	
	943	
	942	
	934	
	934	
2 | 5	1542	1510
	1500	
	1520	
	1462	
	1528	

Ton	z	Mittelwerth z
3 | 2	331	330,5
	330	
3 | 3	617	617
3 | 5	1588	1588
4 | 1	308	308
4 | 3	784	780,5
	777	
5 | 0	455	455
5 | 1	505	503,5
	502	
5 | 2	699	699,5
	700	

Mit Hülfe der Gleichung (23) S. 28 ist die Schwingungszahl zu *berechnen*:

$$z = r^2 h^2 \cdot \frac{D\pi}{2a^2} \sqrt{\frac{c^2 - c_1^2}{12 c \varepsilon}}.$$



Setzt man die Constanten ein

$$D = 0{,}0935 \text{ cm} \qquad c = 799{,}2 \cdot 10^9$$
$$a = 27{,}92 \text{ cm} \qquad c_1 = 209{,}3 \cdot 10^9 \quad \text{(vgl. S. 44)}$$
$$\varepsilon = 2{,}5072$$

und entnimmt man der Fig. 9 die für $a/b = 3{,}173$ geltenden Werthe $r^2 h^2$, so erhält man die Schwingungszahlen z, welche im Folgenden mit den Mittelwerthen der Beobachtung zusammengestellt sind:

Schwingung	$r^2 h^2$	Schwingungszahl		Abweichung in Proc.
		berechn.	beob.	
2 | 2	7,37	217	214	− 1,4
2 | 2	17,26	509	509,4	+ 0,1
2 | 3 + 4 | 2			501,8	− 1,4
4 | 2			488,0	− 4,1
2 | 4	32,12	947	940,7	− 0,6
2 | 5	51,7	1524	1510	− 0,9
3 | 2	11,32	334	330,5	− 1,0
3 | 3	21,08	622	617	− 0,8
3 | 5	55,5	1637	1588	− 3,1
4 | 1	11,02	325	308	− 5,2
4 | 3	27,2	802	780,5	− 2,7
5 | 0	15,96	471	455	− 3,4
5 | 1	18,0	531	503,5	− 5,1
5 | 2	24,55	724	699,5	− 3,3

Mit einer etwas stärkeren Klangplatte habe ich drei Einzelschwingungen beobachtet. Die Constanten der Platte waren:

$$D = 0{,}189 \text{ cm} \qquad a/b = 2{,}971$$
$$a = 26{,}86 \text{ cm} \qquad c\,c_1 \text{ wie oben.}$$
$$\varepsilon = 2{,}51$$

Es ergeben sich damit die folgenden Schwingungszahlen, die wieder mit den Beobachtungszahlen zusammengestellt sind:

Schwingung	$r^2 h^2$	Schwingungszahl z		Abweichung in Proc.
		berechn.	beob.	
2 | 1	2,24	145	133	− 8,0
2 | 2	6,63	429	406	− 5,4
2 | 3	15,29	989	940	− 4,9

Offenbar ist die Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe z bei der dünneren Platte besser wie bei der stärkeren. Und für die dünnere Platte scheinen jene Schwingungen besonders grosse Abweichungen zu geben, bei denen eine grössere Anzahl sich kreuzender Knotenlinien auftreten, die Platte also in viele kleine Schwingungsfelder zerfällt. Diese Wahrnehmungen unterstützen die Ansicht, dass die Abweichungen der beobachteten z von den berechneten, die ja fast ausschliesslich nach derselben Seite stattfinden, durch die Nichterfüllung jener theoretischen Forderung zu erklären seien, nach welcher die Platte eine gegenüber ihrer Ausdehnung verschwindend kleine Dicke besitze. Diese Forderung ist zunächst bei der dünneren Platte am besten erfüllt; und dann lässt sich vermuthen, dass der störende Einfluss der Dicke einer Platte am geringsten ist, wenn die Platte in möglichst wenige, grosse Schwingungsfelder zerfällt.

Um die ausgesprochene Ansicht noch weiter zu unterstützen, wäre zweckmässig gewesen, auch an der stärkeren Platte die Töne mit mehreren sich kreuzenden Knotenlinien zu beobachten. Es ist mir aber nicht gelungen, die im Verhältniss sehr starke Platte in diese Schwingungen zu versetzen.

Bei der dünneren Platte habe ich den tiefsten Ton 2|0 nicht hervorbringen können. Schwingung 2|1 habe ich beobachtet, fand aber ein sehr abweichendes Resultat. Für die tiefen, brummenden Töne ist die Schwingungszahl sehr schwer zu bestimmen. Selbst Ton 2|2 zeigt noch eine grössere Abweichung.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

Das behandelte Problem der transversalen Schwingung einer rechteckigen Platte, die zwischen zwei feste Wände gestemmt ist, lässt sowohl eine *völlig strenge, theoretische* Behandlung zu, als auch eine Beobachtung, die sich mit weit grösserer Genauigkeit an die Voraussetzungen der Theorie anschliesst, als es gemeinhin bei der üblichen Befestigung Chladni'scher Klangplatten der Fall ist. Die Schwingungen zerfallen in einfache und mehrfache. Die Klangfiguren der *einfachen Schwingungen* haben ein gitterförmiges Aussehen und bestehen aus sich kreuzenden, geraden, den Kanten parallelen

Knotenlinien. Die Knotenlinien parallel den befestigten Plattenkanten theilen die Platte in 1, 2, 3 ... gleiche Theile, die andere Schaar von Knotenlinien hat ungleiche Abstände voneinander, und zwar sind diese nahezu gleich den bei einem beiderseits freien, transversal schwingenden Stab auftretenden Knotenpunktsabständen. Die entstehenden Töne haben Schwingungszahlen, welche für verschiedene Platten von gleichem Kantenverhältniss proportional deren Dicke und umgekehrt proportional dem Quadrat deren Seitenlängen sind. Jeder Einzelschwingung entspricht im allgemeinen ein bestimmter Ton. Es giebt aber Plattenformate, bei denen zwei oder mehr verschiedene Einzelschwingungen denselben Ton liefern. Die Ueberlagerung zweier oder mehr solcher Einzelschwingungen führt zu einer *Doppelschwingung* oder allgemein *mehrfachen Schwingung*. Je nach dem Verhältniss der Intensitäten der beiden componirenden Einzelschwingungen ist die Klangfigur der mehrfachen Schwingung eine andere. Die Aenderung dieses Verhältnisses führt zu einer cyklischen Figurenfolge, die analog derjenigen ist, die bei schwingenden Membranen auftritt.

Soweit die Beobachtungen den theoretischen Annahmen nachzukommen vermögen, bestätigen sie die Theorie.

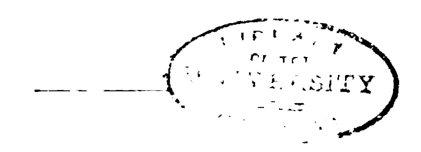


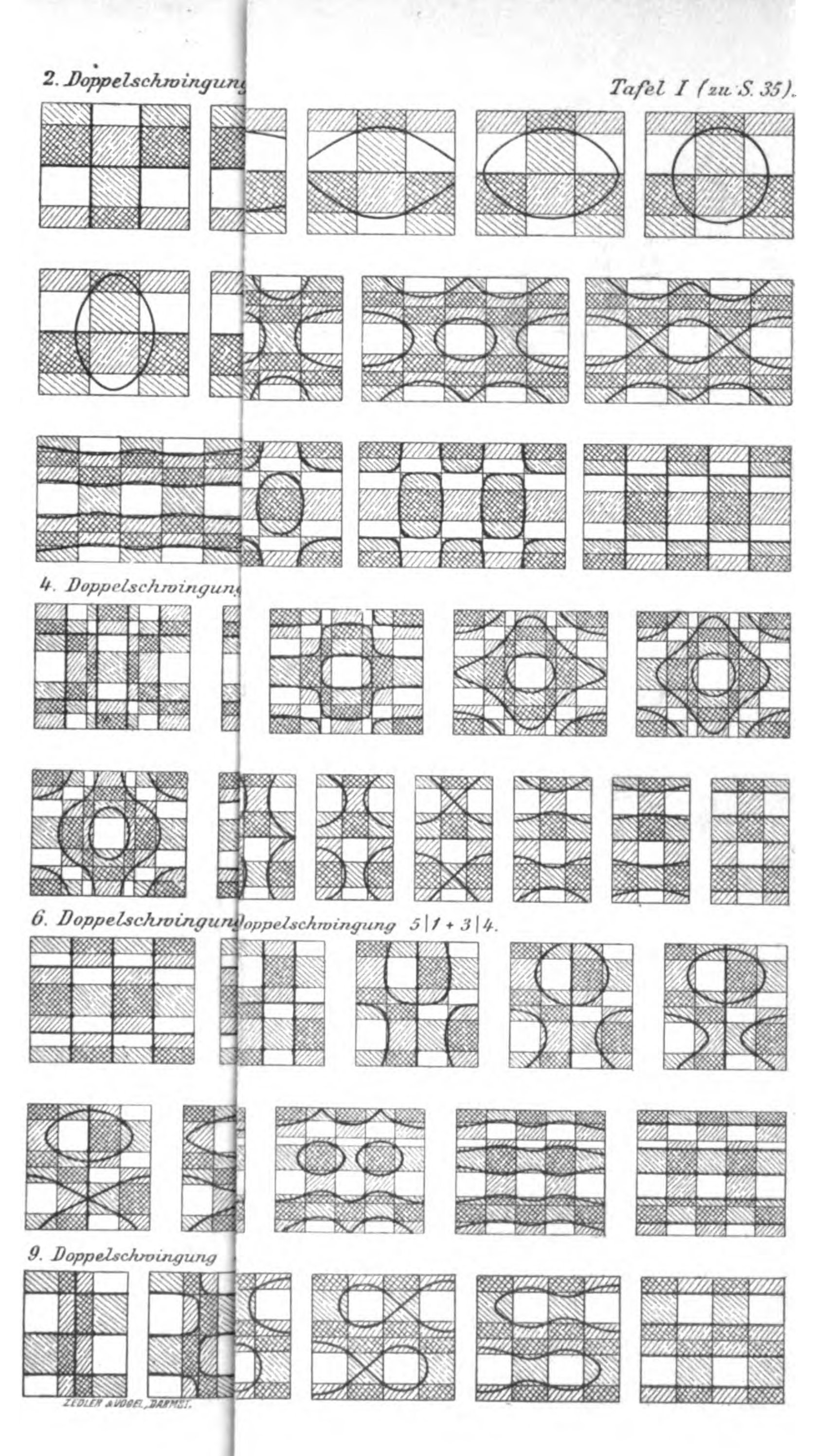
Lebenslauf.

Der Verfasser vorliegender Arbeit, Friedrich Conrad Zeissig, wurde geboren am 12. Sept. 1865 zu Leipzig. Er ist Sohn des Leipziger Architecten Ernst Zeissig, gehört der evang.-luth. Kirche an.

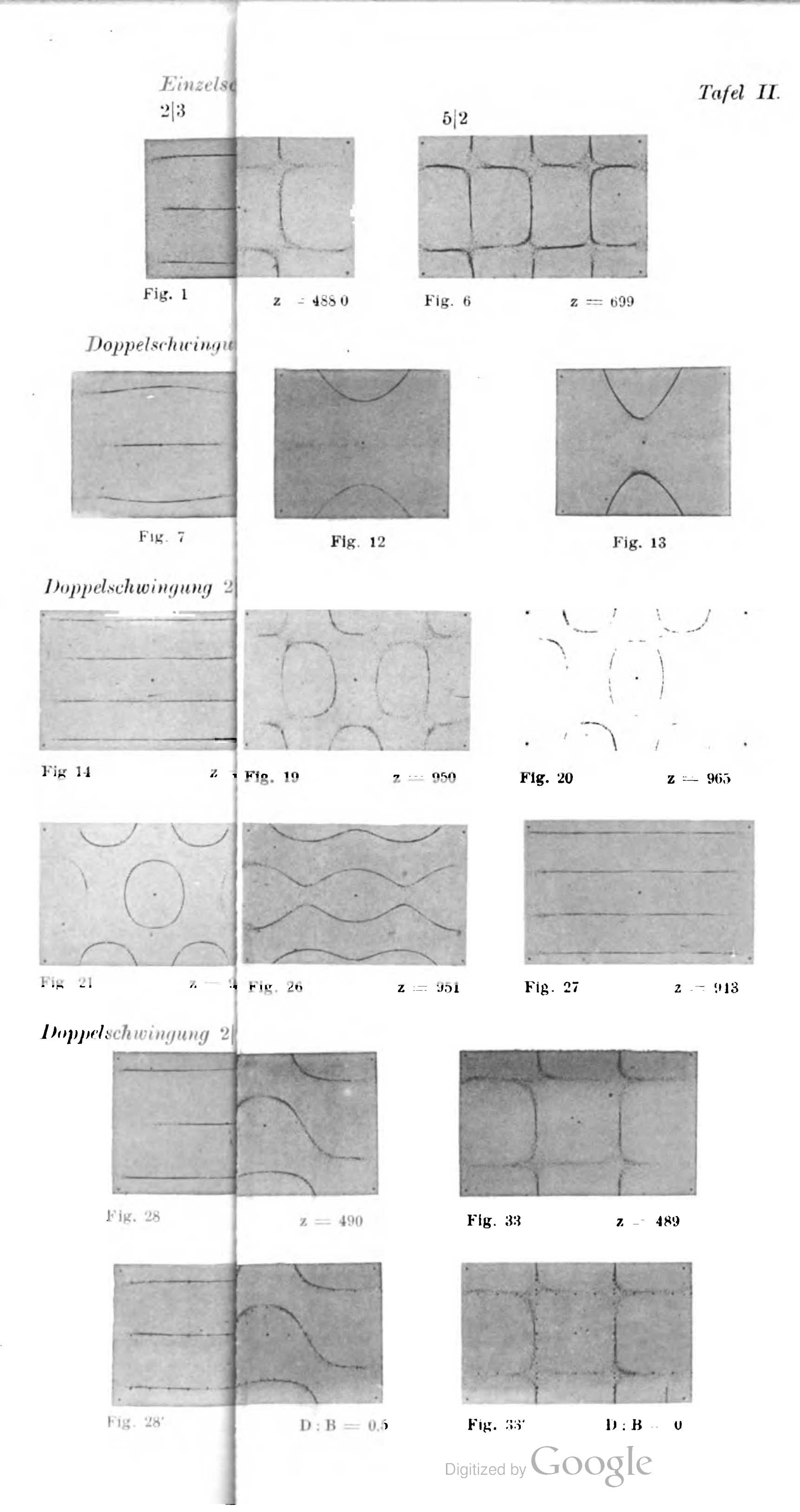
Von Ostern 1876 bis Ostern 1885 besuchte er das städtische Realgymnasium zu Leipzig, das er mit dem Reifezeugniss verliess. Vom Herbst 1885 bis dahin 1888 war er als Lehrling in der Werkstätte für Mechanik der Herren Hildebrand und Schramm in Freiberg i. S. Darauf, Michaelis 1888, besuchte er die Universität Göttingen, um Mathematik und exacte Naturwissenschaften zu studiren. Er blieb dort bis Ostern 1893. Seit dieser Zeit ist er Assistent am physikalischen Institute der Technischen Hochschule Darmstadt. Seine akademischen Lehrer in Göttingen waren die Herren L. Ambronn, Burckhard, P. Drude, Henking, F. Klein, Th. Liebisch, H. Meyer, V. Meyer, W. Nernst, E. Riecke, Schoenflies, W. Schur, H. A. Schwarz, W. Voigt.

Seinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. W. Voigt, sagt der Verf. für die ihm während seiner ganzen Studienzeit erwiesene freundliche Unterstützung seinen herzlichsten Dank.




2. Doppelschwingun
Tafel I (zu S. 35).
4. Doppelschwingun
6. Doppelschwingun
Doppelschwingung 5|1 + 3|4.
9. Doppelschwingung
ZEDLER & VOGEL, DARMST.




Einzels
2|3
5|2
Fig. 1
z = 488 0
Fig. 6
z = 699
Doppelschwingu
Fig. 7
Fig. 12
Fig. 13
Doppelschwingung 2
Fig 14
z
Fig. 19
z = 950
Fig. 20
z = 965
Fig 21
z
Fig. 26
z = 951
Fig. 27
z = 913
Doppelschwingung 2
Fig. 28
z = 490
Fig. 33
z = 489
Fig. 28'
D : B = 0,5
Fig. 33'
D : B = 0

